Dirección y Organización n. 85 (2025)
https://doi.org/10.37610/85.687

Análisis de la desproporcionalidad del reparto de poder entre territorios. Caso del Parlamento de Cataluña

Analysis of the disproportionality of the distribution of power between territories. The case of the Parliament of Catalonia

Joaquín Bautista-Valhondo[1]

Recibido: 19/06/2023 | Aceptado: 20/12/2023

Resumen

Se analiza la representación de la ciudadanía catalana en el Parlamento de Cataluña correspondiente a cuatro circunscripciones que corresponden a las cuatro provincias de la Comunidad Autónoma. Atendiendo al principio "*una persona, un voto*" o bien "*un representante para el mismo número de personas representadas*", se observa un sesgo significativo entre el reparto actual del poder entre territorios, derivado de la aplicación del sistema electoral vigente, y el reparto resultante al aplicar el principio de proporcionalidad por cuotas de poder en función del número de habitantes de cada circunscripción. Se aplican diversos métodos (Hamilton, Adams, Dean, Hill, Webster, Jefferson y el belga) reconocidos por la comunidad académica para el reparto de escaños en una cámara de representantes y se comparan los resultados ofrecidos por estos con la representación actual de la ciudadanía en el Parlamento de Cataluña[2].

Palabras clave: Desproporcionalidad, índices de desproporcionalidad, problema del reparto proporcional, Parlamento de Cataluña, LOREG, Estatuto de Autonomía de Cataluña, poder parlamentario.

Abstract

The representation of Catalan citizens in the Parliament of Catalonia corresponding to four constituencies that correspond to the four provinces of the Autonomous Community is analyzed. According to the principle "one person, one vote" or "one representative for the same number of people represented", a significant bias is observed between the current distribution of power between territories, derived from the application of the current electoral system, and the distribution resulting from applying the principle of proportionality by quotas of power based on the number of inhabitants of each constituency. Various methods (Hamilton, Adams, Dean, Hill, Webster, Jefferson and the Belgian method) recognized by the academic community for the distribution of seats in a chamber of representatives are applied and the results offered by these are compared with the current representation of citizens in the Parliament of Catalonia.

Keywords: Malapportionment, disproportionality indices, apportionment problem, Parliament of Catalonia, LOREG, Statute of Autonomy of Catalonia, parliamentary power.

[1] Instituto de Organización y Control de Sistemas Industriales (IOC). Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial de Barcelona (ETSEIB). Universitat Politècnica de Catalunya (UPC). Email: joaquin.bautista@upc.edu; ORCID: 0000-0002-2214-4991.

[2] Una versión inicial de este trabajo se presentó el 19 de junio de 2023 en la Real Academia Europea de Doctores (RAED), Barcelona. Conferencia: "Reparto de poder entre territorios. Caso Parlament de Catalunya". https://raed.academy/eventos/reparto-de-poder-entre-territorios-caso-parlament-de-catalunya/

1. Introducción

Cataluña es la única comunidad autónoma que no tiene una ley electoral propia y por este motivo se aplica la Ley Orgánica de Régimen Electoral General, Ley Orgánica 5/1985, de 19 de junio (LOREG) y alguna disposición (transitoria) del Estatuto de Autonomía de Cataluña.

La LOREG fija en su artículo 161 que la circunscripción electoral es la provincia y que la barrera legal es del 3%, es decir que los partidos que obtienen menos del 3% de los votos en una circunscripción no optan al reparto de escaños (artículo 163).

Por su parte, la Ley Orgánica 6/2006, de 19 de julio, de reforma del Estatuto de Autonomía de Cataluña en su disposición transitoria segunda sobre la vigencia de disposiciones transitorias anteriores dice: "*Las disposiciones transitorias tercera, **cuarta** y sexta de la Ley Orgánica* 4/1979*, de* 18 *de diciembre, de Estatuto de Autonomía de Cataluña, mantienen, en lo que corresponda, la vigencia como regulación transitoria*".

Atendiendo a la disposición transitoria **cuarta** de la Ley Orgánica 4/1979, podemos leer: "*En tanto una Ley de Cataluña no regule el procedimiento para las elecciones al Parlamento, éste será elegido de acuerdo con las **normas** siguientes* […]"

La **Norma 2** indica: "*Las circunscripciones electorales serán las cuatro provincias de Barcelona, Gerona, Lérida y Tarragona. El Parlamento de Cataluña estará integrado por* 135 *Diputados, de los cuales la circunscripción de Barcelona elegirá un Diputado por cada* 50.000 *habitantes, con un máximo de* 85 *Diputados. Las circunscripciones de Gerona, Lérida y Tarragona elegirán un mínimo de seis Diputados, más uno por cada* 40.000 *habitantes, atribuyéndose a las mismas* 17*,* 15 *y* 18 *Diputados, respectivamente*".

Y la **Norma 3** dice: "*Los Diputados serán elegidos por sufragio universal, igual, directo y secreto, de los mayores de dieciocho años, según un sistema de escrutinio proporcional.*"

Combinado los elementos jurídicos anteriores, el sistema electoral catalán presenta las siguientes características:

- El Parlamento de Cataluña consiste en una sola cámara de 135 escaños.
- Sus miembros se eligen por sufragio universal cada 4 años.
- Cada provincia de Cataluña forma una circunscripción.
- Barcelona tiene un parlamentario por cada 50.000 habitantes, hasta un máximo de 85 escaños.
- Girona, Lleida y Tarragona tienen una asignación mínima de 6 escaños cada una, más un representante por cada 40.000 habitantes.
- Los Diputados son elegidos por sufragio universal (igual, directo y secreto) de los mayores de dieciocho años, según un sistema de escrutinio proporcional. Los sistemas de reparto proporcional que establece la LOREG son: el método de Hamilton o de los Restos mayores para la distribución territorial de escaños en función de la población (art. 162) y el método de Jefferson o Ley D'Hondt para la atribución de los escaños entre fuerzas políticas en función de los resultados del escrutinio (art. 163).

Como consecuencia de tales características, desde 1980, el reparto de los 135 escaños del Parlamento de Cataluña entre las cuatro circunscripciones ha sido: 85 para Barcelona, 17 para Girona, 15 para Lleida y 18 para Tarragona. Este hecho condiciona el peso del poder otorgado a la ciudanía según el territorio y el poder que alcanzan los partidos políticos en la cámara de representantes (Bautista 2023).

Considerando el sistema electoral que se aplica actualmente en Cataluña, las preguntas que surgen son:

p1. ¿Cuánto cuesta un escaño en cada circunscripción medido como el número medio de habitantes representados por un escaño?

p2. ¿Qué esfuerzo relativo electoral tiene que hacer cada circunscripción para obtener representación en el parlamento catalán?

p3. ¿El sistema electoral catalán cumple el principio "*un representante para el mismo número de personas*", sin depender de la parte del territorio en la que se habite?

Las respuestas a p1 y p2 no son inmediatas, pues dependen del año al que se refiera el censo de las circunscripciones; la respuesta a p3 se deriva de las respuestas a p1 y p2.

El resto de este trabajo está estructurado tal como sigue. En la sección 2, se definen e ilustran las principales métricas de representatividad territorial parcial. En la sección 3, se recogen los índices globales de desproporcionalidad más utilizados en los sistemas electorales. La sección 4 está dedicada a modelos y métodos de reparto proporcional utilizados en el reparto de escaños en cámaras de representantes. En la sección 5 se aplican los métodos e índices al caso del Parlamento de Cataluña (Legislatura 2024-2028). Finalmente, las conclusiones de este trabajo se exponen en la sección 6.

2. Métricas de representatividad territorial parcial

Para definir las métricas o índices de representatividad territorial parcial utilizaremos la siguiente nomenclatura:

Sean:

I	Conjunto de circunscripciones que constituyen el Territorio objeto de estudio. Índice de las circunscripciones: $i = 1,..,n$.
$p_i, \vec{p}$	Población censada en la circunscripción $i \in I$: número de personas afectadas por un concurso electoral en $i \in I$. En forma vectorial: $\vec{p} = (p_1, \cdots, p_n)$.

P	Población total del Territorio: $P=\sum_{i=1}^{n} p_i$. Es el número total de personas afectadas por un concurso electoral.
$\pi_i, \vec{\pi}$	Proporción de la población de la circunscripción $i \in I$: $\pi_i = p_i/P$ $(\forall i)$. En forma vectorial: $\vec{\pi} = (\pi_1,\ldots\pi_n)$.
H	Número de escaños a repartir entre las circunscripciones. Se asocia al tamaño de la cámara de representantes (135 escaños en el Parlamento de Cataluña).
$x_i, \vec{x}$	Número entero de escaños asignados a la circunscripción, dependiente del método de reparto. En forma vectorial: $\vec{x} = (x_1,\ldots,x_n)$.
$\xi_i, \vec{\xi}$	Proporción de escaños asignados a la circunscripción $i \in I$: $\xi_i = x_i/H$ $(\forall i)$, dependiente del método. En forma vectorial: $\vec{\xi} = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$.
$\overline{c}$	Coste electoral medio del Territorio: $\overline{c} = P/H$. Es el número medio de personas necesarias para obtener un escaño en el concurso electoral. El valor $\overline{c}$ depende del instante en que se realiza el censo electoral: $\overline{c} = \overline{c}\,(t)$.

En tales condiciones, se definen los siguientes índices parciales de representación:

IP1. Cuota territorial proporcional de una circunscripción

Dados el tamaño de cámara H, y el vector de poblaciones $\vec{p} = (p_1,\ldots,p_n)$, se llama *cuota territorial* de la circunscripción $i \in I$, y la notaremos por q_i, al número de escaños teórico que proporcionalmente corresponde a la circunscripción $i \in I$ en función de su población; esto es:

$$q_i = \frac{p_i}{P}H = \pi_i H (\forall i \in I) : \sum_{i=1}^{n} q_i = H; \vec{q} = (q_1, \ldots, q_n) \qquad (1)$$

Las cuotas territoriales son números racionales que representan la asignación ideal.

IP2. Prima electoral de una circunscripción

Dados el tamaño de cámara H, el vector de escaños asignados $\vec{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ y el vector de poblaciones $\vec{p} = (p_1,\ldots,p_n)$, se llama *prima electoral* de la circunscripción $i \in I$, y la notaremos por s_i, a la diferencia entre la proporción de escaños de la Cámara que se asignan a la circunscripción $i \in I$ y la proporción de habitantes sobre la población de derecho en el Territorio que corresponde a la circunscripción $i \in I$; esto es:

$$s_i \equiv \xi_i - \pi_i = \frac{x_i}{H} - \frac{p_i}{P} (\forall i \in I); \vec{s} = (s_1, \ldots, s_n) \qquad (2)$$

Cuando $s_i = 0$, se dice que la circunscripción $i \in I$ está bien representada en la cámara respecto a su población, mientras que $s_i > 0$ implica que la circunscripción $i \in I$ está sobrerrepresentada y si $s_i < 0$, la circunscripción $i \in I$ está infrarrepresentada.

IP3. Índice de representación poblacional de una circunscripción

Dados el tamaño de cámara H, el vector de escaños asignados $\vec{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ y el vector de poblaciones $\vec{p} = (p_1,\ldots,p_n)$, se llama *índice de representación* poblacional de la circunscripción $i \in I$, y lo notaremos por r_i, a la ratio entre la proporción de escaños de la circunscripción $i \in I$ y la proporción de habitantes correspondiente; esto es:

$$r_i = \frac{\xi_i}{\pi_i} = \frac{x_i/H}{p_i/P} = \frac{x_i}{q_i} (\forall i \in I); \vec{r} = (r_1, \ldots, r_n) \qquad (3)$$

Si $r_i = 1$, la circunscripción $i \in I$ está bien representada en la cámara respecto a su cuota q_i, mientras que si $r_i > 1$, la circunscripción $i \in I$ está sobrerrepresentada y si $r_i < 1$, la circunscripción $i \in I$ está infrarrepresentada. La ratio r_i $(\forall i)$ se llama también *relación de ventaja* (Simón 2009) de la circunscripción o partido político.

IP4. Coste electoral territorial absoluto de una circunscripción

Dados el tamaño de cámara H, el vector de escaños asignados a las circunscripciones $\vec{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ y el vector de poblaciones $\vec{p} = (p_1,\ldots,p_n)$, se llama *coste electoral* territorial absoluto de la circunscripción $i \in I$, y lo notaremos por c_i, al número medio de personas de la circunscripción $i \in I$ representadas por un escaño dentro de la Cámara:

$$c_i = \frac{p_i}{x_i} (\forall i \in I) : \sum_{i=1}^{n} x_i = H; \vec{c} = (c_1, \ldots, c_n) \qquad (4)$$

Por tanto, el coste c_i representa lo que le cuesta conseguir un escaño a la circunscripción $i \in I$ medido en número de habitantes.

IP5. Coste electoral territorial relativo de una circunscripción

Dado el vector de costes electorales absolutos $\overline{c} = (c_1,\ldots,c_n)$ de un territorio y el coste electoral medio correspondiente: $\overline{c} = P/H$, se define coste electoral territorial relativo asociado a la circunscripción $i \in I$, y lo notaremos por cr_i como la ratio entre el coste territorial de la circunscripción $i \in I$ y el coste electoral medio del Territorio. Esto es:

$$cr_i = \frac{c_i}{\overline{c}} = \frac{p_i/x_i}{P/H} = \frac{p_i H}{x_i P} = \frac{q_i}{x_i} = \frac{1}{r_i} (\forall i \in I); \overrightarrow{cr} = (cr_1, \ldots, cr_n) \qquad (5)$$

El coste relativo cr_i determina lo que le cuesta conseguir un escaño a la circunscripción $i \in I$ respecto a lo que le cuesta en promedio al Territorio. La función cr_i es la inversa del índice de representación poblacional r_i(relación de ventaja) de la circunscripción o partido político. En condiciones de perfecto reparto proporcional, los costes relativos de las circunscripciones deben ser idénticos e iguales a 1.

IP6. Esfuerzo territorial relativo de una circunscripción

Dados el tamaño de cámara H, el vector de escaños asignados $\vec{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ y el vector de poblaciones $\vec{p} = (p_1,\ldots,p_n)$, se define *esfuerzo territorial relativo* asociado a la circunscripción $i \in I$, y lo notaremos por e_i, como la ratio entre el coste territorial de la circunscripción $i \in I$ y el coste territorial mínimo (Bautista 2023). Esto es:

$$e_i = \frac{c_i}{c_{min}} (\forall i \in I) : c_{min} = \min_{i' \in I} c_{i'} ; \vec{e} = (e_1, \ldots, e_n) \tag{6}$$

Por tanto, el esfuerzo e_i representa también lo que le cuesta un escaño a la circunscripción $i \in I$ respecto a lo que le cuesta un escaño a la circunscripción que le cuesta menos.

Observación-1: Los índices de representatividad territorial parcial, IP1 a IP6, se pueden adaptar al conjunto de fuerzas políticas concursantes sustituyendo la población total P y el vector poblacional $\vec{p} = (p_1,\ldots,p_n)$ por V y $v = (v_1,\ldots,v_n)$, respectivamente, donde V simboliza el número total de votos tenidos en cuenta en el concurso electoral y v_i $(\forall i = 1,..,n)$ representa el número de votos conseguidos por la fuerza política $i \in I$, siendo I, en este caso, el conjunto de fuerzas políticas participantes y con derecho a escaño.

La aplicación de las métricas territoriales IP1 a IP6 al censo de Cataluña del año 2024 (Idescat 2024) ofrece los resultados que se muestran en la Tabla 1.

A la vista de la Tabla 1 se puede afirmar:

1. El número de escaños asignados (x_i) a las circunscripciones discrepa sustancialmente de los valores de sus respectivas cuotas territoriales (q_i) que representan el número de escaños teórico que proporcionalmente correspondería a cada circunscripción en el año 2024. Para Barcelona la discrepancia es 14,10 escaños por defecto, para Girona es 3,16 escaños por encima de su cuota, y para Tarragona y Lleida las discrepancias por exceso son 3,55 y 7,39 escaños, respectivamente.
2. Lleida, Tarragona y Girona están sobrerrepresentadas en el parlamento catalán con unas primas electorales (s_i) del 5,48%, 2,63% y 2,34%, respectivamente, mientras que Barcelona está claramente infrarrepresentada con una prima negativa del -10,45%; este hecho implica una transferencia de poder desde Barcelona hacia las otras provincias.
3. El índice de representación (r_i) de Barcelona es 0,86, estando infrarrepresentada, mientras que Tarragona, Girona y Lleida están sobrerrepresentada con unos índices respectivos iguales a 1,25, 1,23 y 1,97.
4. Los costes territoriales absolutos (c_i) de 2024 son muy distintos en las 4 provincias, teniendo Barcelona el valor máximo con 69.234 habitantes por escaño y el mínimo Lleida con 30.109 habitantes por escaño.
5. Los costes territoriales relativos (cr_i) de 2024 están contenidos en el intervalo [0,80; 1,17]. Barcelona presenta un sobrecoste relativo del 17%, mientras que Girona, Tarragona y Lleida tienen unos *ahorros* del 19%, 20% y 49%, respectivamente.
6. El esfuerzo relativo (e_i) de Barcelona respecto a Lleida es 2,30, el de Girona 1,61 y el de Tarragona 1,58; esto significa que un voto en Lleida vale más que 2 votos de Barcelona y que 2 votos en Lleida valen más que 3 votos de Girona y de Tarragona, si la ratio [votantes/población] es semejante en las 4 provincias.
7. Análogamente, un voto de Girona vale 1,43 votos de Barcelona y un voto en Tarragona vale 1,45 votos de Barcelona (año 2024).

Lógicamente, los costes electorales territoriales absolutos ($c_i \forall i$) y relativos ($cr_i \forall i$) son funciones temporales, pues la población de Catalunya ha variado (Idescat 2024), mientras que el reparto de escaños entre provincias ha sido el mismo desde las primeras elecciones autonómicas de 1980. Para ilustrar este hecho, la Figura 1 refleja la evolución temporal de tales costes.

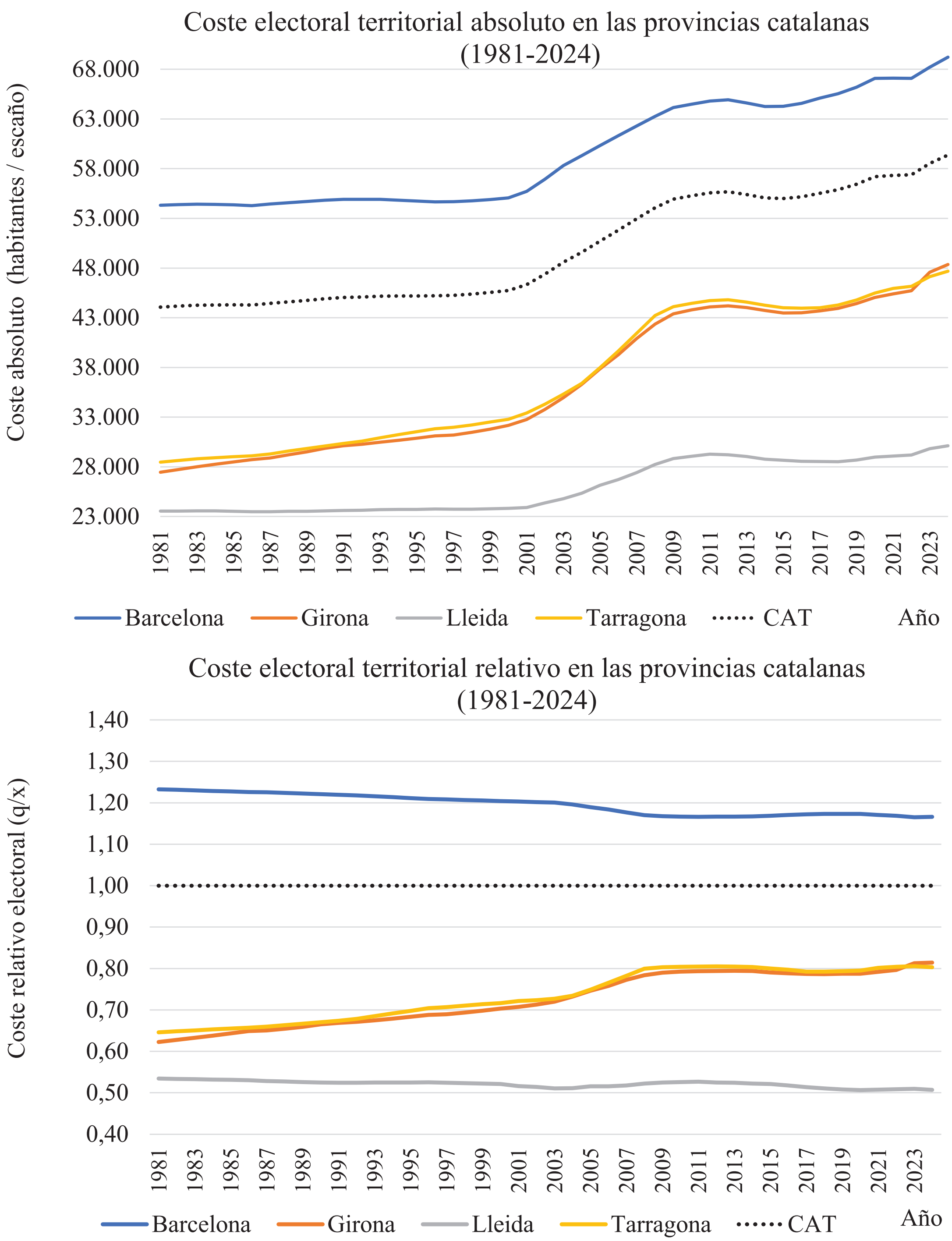
Tabla 1. Población (p_i), número de escaños (x_i),cuota territorial (q_i), prima electoral (s_i), índice de representación (r_i), coste territorial absoluto (c_i), coste territorial relativo (cr_i) y esfuerzo territorial relativo (e_i) de las circunscripciones catalanas (Censo poblacional (p_i) 2024).

Censo CAT-2024	p_i	x_i	q_i	s_i (%)	r_i	c_i	cr_i	e_i
Barcelona	5.884.873	85	99,10	-10,45	0,86	69.234	1,17	2,30
Girona	821.970	17	13,84	2,34	1,23	48.351	0,81	1,61
Lleida	451.641	15	7,61	5,48	1,97	30.109	0,51	1,00
Tarragona	858.122	18	14,45	2,63	1,25	47.673	0,80	1,58
CATALUÑA	8.016.606	135	135	0,00	1,00	59.382	1,00	1,97
Min	451.641	15	7,61	-10,45	0,86	30.109	0,51	1,00
Max	5.884.873	85	99,10	5,48	1,97	69.234	1,17	2,30

Algunos detalles que resaltar sobre los resultados de la Figura 1 son:

1. La población de Lleida se mantiene más o menos constante desde 2011, pues las curvas de coste electoral territorial absoluto son homotéticas a las de la población con factores iguales a 15 en Lleida, 17 en Girona, 18 en Tarragona y 85 en Barcelona; la población en las otras tres provincias presenta una evolución creciente.
2. El coste electoral territorial absoluto promedio de Cataluña crece sustancialmente en los últimos 44 años, pasando de 44.073 a 59.382 habitantes por escaño entre 1981 y 2024; esto implica que durante este tiempo un escaño del parlamento catalán se ha devaluado en

Figura 1. Arriba: Coste electoral territorial absoluto ($c_i \forall i$). Abajo: Coste electoral territorial relativo ($cr_i \forall i$) de las provincias catalanas (1981-2024).



representación promedio un 25,78%; en concreto, las devaluaciones de los escaños de Barcelona, Girona, Lleida y Tarragona han sido del orden del 21,53%, 43,24%, 21,81% y 40,28%, respectivamente, siendo Girona la provincia en la que más se ha devaluado el poder representativo desde 1981.

3. El coste electoral territorial de Girona sobrepasa por segunda vez consecutiva al de Tarragona, según los censos (47.569 vs. 47.144 en 2023 y 48.351 vs. 47.673 en 2024); estos costes electorales territoriales absolutos están aún lejos del coste electoral territorial absoluto promedio de Catalunya de 59.382 hab./escaño en 2024.
4. El coste electoral territorial relativo de Barcelona se reduce en 6 puntos porcentuales (6 p.p.), pasando de 1,23 a 1,17 entre 1981 y 2024, mientras que Lleida reduce su coste electoral territorial relativo en 2 p.p. durante este tiempo (0,53 en 1981 vs. 0,51 en 2024). Por su parte, el coste electoral territorial relativo aumenta en las otras dos provincias, en concreto, Girona pasa de 0,62 en 1981 a 0,81 en 2024 (19 p.p.) y Tarragona pasa de 0,65 en 1981 a 0,80 en 2024 (15 p.p.).

Análogamente, el esfuerzo territorial relativo ($e_i \forall i$), la prima electoral territorial ($s_i \forall i$) y el índice de representación ($r_i \forall i$) son funciones temporales.

La evolución temporal del esfuerzo territorial relativo ($e_i \forall i$) de las provincias catalanas se muestran en la Figura 2.

Atendiendo a la Figura 2, se puede afirmar:

1. El esfuerzo relativo promedio de Cataluña está contenido en el intervalo [1,87; 1,97] desde 1981, siendo igual a 1,97 en el año 2024.
2. El esfuerzo relativo de Barcelona se distribuye en el intervalo [2,21; 2,35] desde 1981, siendo igual a 2,30 en el año 2024.
3. Los esfuerzos relativos de Girona y Tarragona presentan una tendencia al alza desde 1981, siendo los intervalos respectivos [1,17; 1,61] y [1,21; 1,58].
4. El esfuerzo relativo de Girona supera por segunda vez consecutiva desde el año 2023 al esfuerzo de Tarragona (1,60 y 1,61 vs. 1,58).

La evolución temporal de la *representatividad territorial* se refleja con dos métricas: la prima electoral territorial) –Figura 3–, y el índice de representación poblacional ($r_i \forall i$) –Figura 4–. El análisis de los resultados de las Figuras 3 y 4 permite afirmar:

1. Barcelona es la única provincia infrarrepresentada en el Parlamento de Cataluña con valores porcentuales negativos de prima electoral dentro del intervalo [−14,65; −10,40] y unos índices de representación comprendidos en el intervalo [0,81; 0,86] desde 1981, siendo $s_B = -10{,}45\%$ y $r_B = 0{,}86$ en 2024. Este hecho significa que la población de Barcelona ha estado cediendo más del 10% del poder territorial que le corresponde durante estos años. En cualquier caso, la representatividad de Barcelona ha aumentado desde 1981 hasta 2024, con un incremento de la prima

Figura 2. Esfuerzo relativo ($e_i \forall i$) de las provincias catalanas (1981-2024).

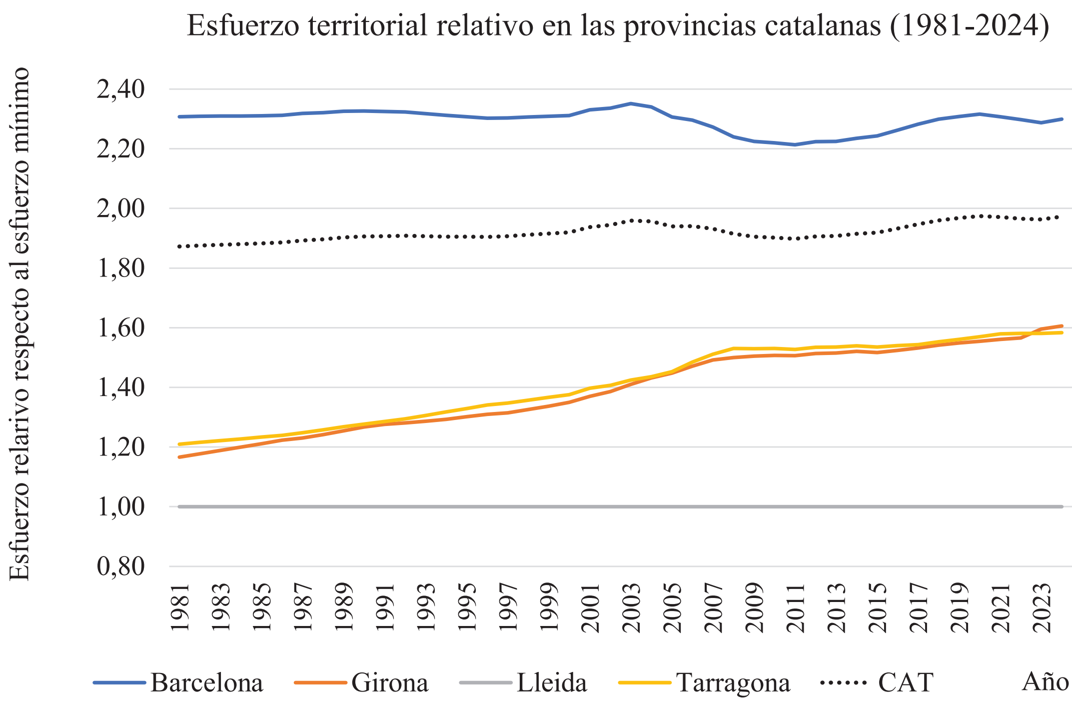


Figura 3. Prima electoral territorial ($s_i \forall i$) de las provincias catalanas (1981-2024).

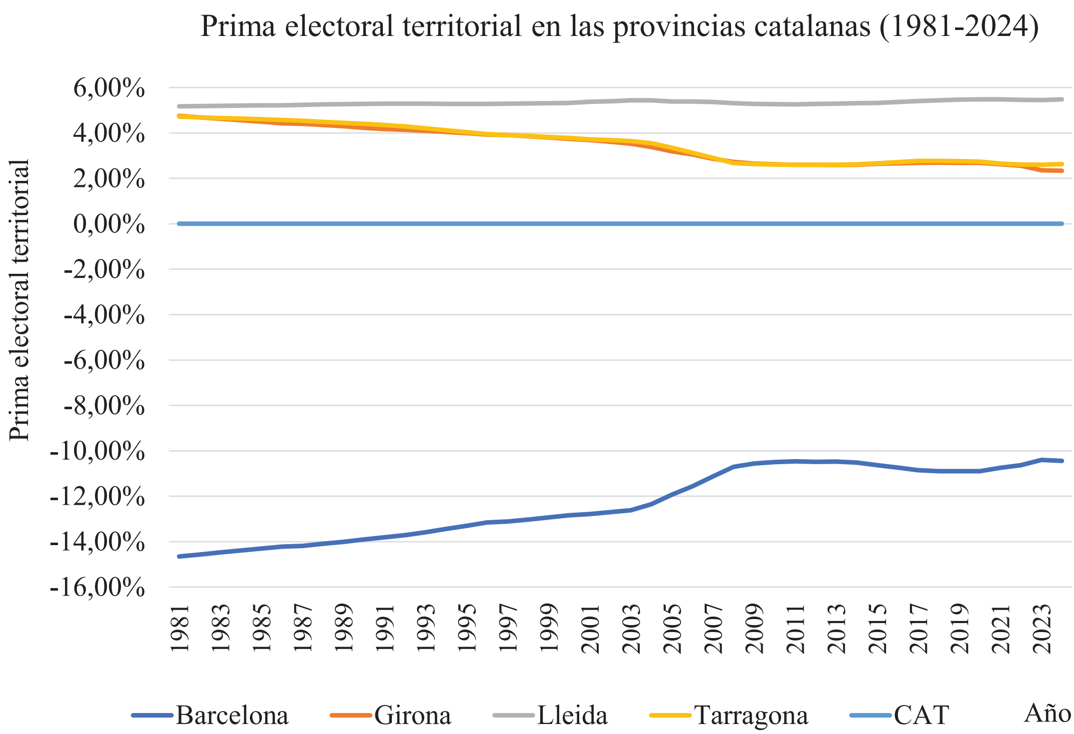
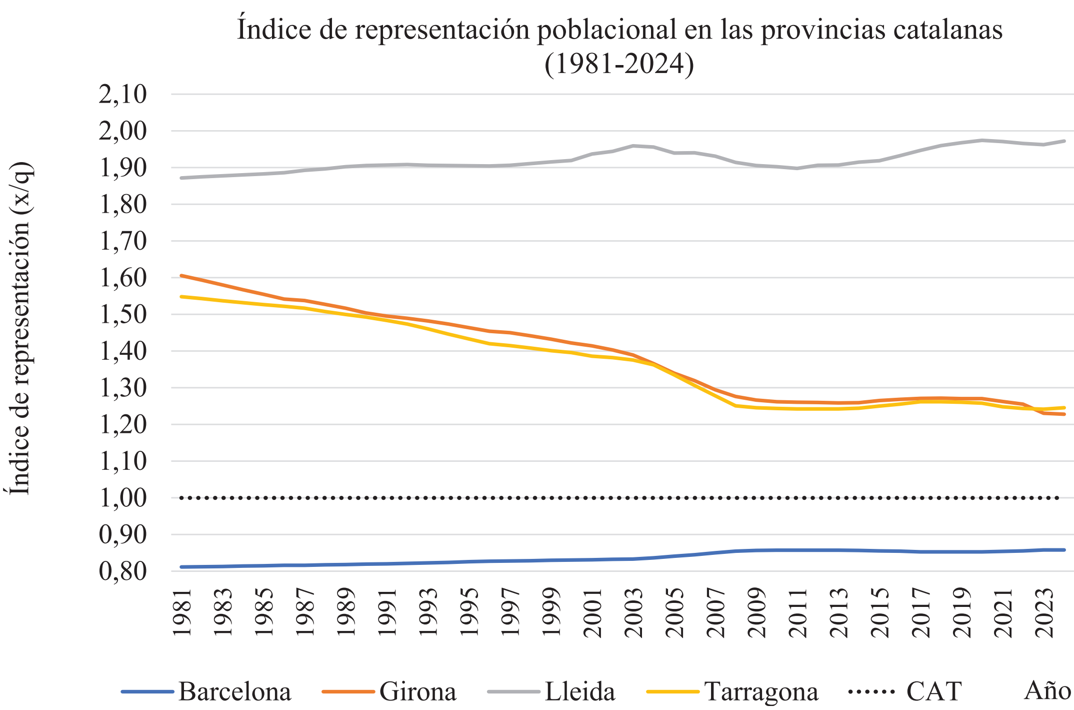


Figura 4. Índice de representación poblacional ($r_i \forall i$) de las provincias catalanas (1981-2024).



electoral $\Delta s_B \cong 4{,}20\%$ y un incremento del índice de representación $\Delta r_B \cong 0{,}05$.

2. La provincia de Lleida es la más sobrerrepresentada con primas electorales dentro del intervalo [5,18; 5,48] e índices de representación en el intervalo [1,87; 1,97] desde 1981, siendo s_L = 5,48% y r_L = 1,97 en el año 2024. Lleida también incrementa su representatividad entre 1981 y 2024: $\Delta s_L \cong 0{,}30\%$ y $\Delta r_L \cong 0{,}10$.
3. Tarragona y Girona están sobrerrepresentadas con primas electorales en los intervalos respectivos [2,59; 4,72]

y [2,34; 4,75] e índices de representación en los intervalos [1,24; 1,55] y [1,23; 1,61] desde 1981. Para el año 2024 se tiene: s_T = 2,63%, s_G = 2,34%, r_T = 1,25 y r_G = 1,23. Ambas provincias han perdido representación desde 1981: $\Delta s_T \cong -2{,}09\%$, $\Delta s_G \cong -2{,}41\%$, $\Delta r_T \cong -0{,}30$ y $\Delta r_G \cong -0{,}38$, siendo Girona la provincia más afectada en cuanto a pérdida de representatividad.

Los resultados anteriores evidencian que el sistema electoral vigente en Cataluña no cumple el principio "*un representante para un mismo número de personas*" o bien el principio "*una persona, un voto*" (Balinski y Young 2001).

3. Métricas globales de desproporcionalidad del poder territorial

En la literatura sobre sistemas electorales el término inglés *malapportionment*, que aquí traducimos por *reparto no proporcional* o, simplemente, *desproporcionalidad*, se emplea cuando hay una clara desviación entre los porcentajes de escaños que se asignan (o se eligen) en cada distrito (circunscripción) y los porcentajes de la población (o de votantes registrados) de cada circunscripción (Samuels y Snyder 2001, Simón 2009).

La *desproporcionalidad* de escaños en una cámara de representantes puede medirse de diversas formas, no existiendo consenso académico sobre este tema en cuanto a qué índice mide mejor el reparto no proporcional (Ocaña y Oñate 2024, Urdánoz 2024). Aquí se han seleccionado dos grupos de métricas, a saber:

a. Índices globales que agregan las diferencias entre la proporción de escaños asignados a los territorios y la proporción de la población correspondiente.
b. Índices globales que miden el valor máximo de los índices parciales.

IG1. Índice de desproporcionalidad de Loosemore-Hanby

Corresponde a la semisuma de valores absolutos de las primas electorales del conjunto de circunscripciones o de partidos (Loosemore y Hanby 1971), esto es:

$$I_{LH} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left|s_i\right| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left|\xi_i - \pi_i\right| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{x_i}{H} - \frac{p_i}{P}\right| \qquad (7)$$

A efectos prácticos, el índice I_{LH} representa la proporción de escaños que no han sido asignados de manera estrictamente proporcional a las circunscripciones (o partidos). Por ejemplo, para el año 2024 el valor de I_{LH} territorial del Parlamento de Cataluña es:

$$I_{LH}(C_{2024}) = \frac{1}{2}\times(0{,}1045 + 0{,}0234 + 0{,}0548 + 0{,}0263)$$
$$= 0{,}1045 = 10{,}45\%$$

el cual coincide lógicamente con el valor absoluto de la prima electoral de Barcelona.

El índice I_{LH} es también la mitad de la distancia rectangular (espacio n-dimensional) entre el punto real $\vec{\xi} = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ de proporciones de escaños asignados a las circunscripciones (o partidos) y el punto ideal $\vec{\pi} = (\pi_1,\ldots,\pi_n)$ de proporciones de las poblaciones.

IG2. Índice de desproporcionalidad de Rae

Corresponde a la media aritmética de los valores absolutos de las primas electorales del conjunto de circunscripciones o de partidos (Rae 1971), esto es:

$$I_{Rae} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|s_i\right| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\xi_i - \pi_i\right| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{x_i}{H} - \frac{p_i}{P}\right| \qquad (8)$$

Por tanto, el índice I_R es la prima absoluta media que incluye tanto la sobrerrepresentación como la infrarrepresentación de las circunscripciones. Por ejemplo, para el año 2024 el valor del I_{Rae} territorial del Parlamento de Cataluña es:

$$I_{Rae}(C_{2024}) = \frac{1}{4}\times(0{,}1045 + 0{,}0234 + 0{,}0548 + 0{,}0263)$$
$$= 0{,}0522 = 5{,}22\%$$

El índice I_{Rae} es también la media aritmética de las diferencias absolutas, en un espacio n-dimensional, entre el punto real $\vec{\xi} = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ y el punto ideal $\vec{\pi} = (\pi_1,\ldots,\pi_n)$.

IG3. Índice de desproporcionalidad de Gallagher

Corresponde a la raíz cuadrada de la semisuma de los cuadrados de las primas electorales del conjunto de circunscripciones o de partidos (Gallagher 1991, 1992), esto es:

$$I_{Gal} = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}s_i^2} = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \pi_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{H} - \frac{p_i}{P}\right)^2} \qquad (9)$$

Por ejemplo, para el año 2024 el valor del I_{Gal} territorial del Parlamento de Cataluña es:

$$I_{Gal}(C_{2024}) = \sqrt{\frac{0{,}1045^2 + 0{,}0234^2 + 0{,}0548^2 + 0{,}0263^2}{2}}$$

$$= 0{,}0870 = 8{,}70\%$$

El índice I_{Gal} es también la distancia euclídea (espacio n-dimensional) entre el punto real $\vec{\xi} = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ y el punto ideal $\vec{\pi} = (\pi_1,\ldots,\pi_n)$ dividida por $\sqrt{(2)}$.

IG4. Índice de desproporcionalidad de Sainte-Laguë

Corresponde a la suma de las primas de las circunscripciones (o partidos) elevadas al cuadrado y divididas por las proporciones poblacionales correspondientes, esto es:

$$I_{SL} = \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i^2}{\pi_i} \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{(\xi_i - \pi_i)^2}{\pi_i} \tag{10}$$

Por ejemplo, para el año 2024 el valor del I_{SL} territorial del Parlamento de Cataluña es:

$$I_{SL}(C_{2024}) = \frac{0{,}1045^2}{0{,}7341} + \frac{0{,}0234^2}{0{,}1025} + \frac{0{,}0548^2}{0{,}0563} + \frac{0{,}0263^2}{0{,}1070}$$

$$= 0{,}0799 = 7{,}99\%$$

El índice I_{SL} puede expresarse en función de los índices de representación poblacional: r_i $(\forall i)$, y las proporciones de las poblaciones: π_i $(\forall i)$; en efecto:

$$I_{SL} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\xi_i - \pi_i)^2}{\pi_i} = \sum_{i=1}^{n} \pi_i \left(\frac{\xi_i}{\pi_i} - 1 \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \pi_i (r_i - 1)^2 \tag{11}$$

IG5. Índice de desproporcionalidad de la máxima desviación

Corresponde al máximo de los valores absolutos de las primas electorales del conjunto de circunscripciones (o partidos), esto es:

$$I_{|s|max} = \max_{i\in I}\left\{ \left| s_i \right| \right\} = \max_{i\in I}\left\{ \left| \xi_i - \pi_i \right| \right\} = \max_{i\in I}\left\{ \left| \frac{x_i}{H} - \frac{p_i}{P} \right| \right\} \tag{12}$$

El índice $I_{|s|max}$ es el valor máximo entre la mejor prima electoral y la peor prima electoral cambiada de signo. Para 2024 el $I_{|s|max}$ territorial del Parlamento de Cataluña es:

$$I_{|s|max}\left(C_{2024}\right) = \max_{i\in I}\left\{ 0{,}1045;\, 0{,}0234;\, 0{,}0548;\, 0{,}0263 \right\}$$
$$= 0{,}1045 = 10{,}45\%$$

En Cataluña, el índice de desproporcionalidad de la máxima desviación ofrece el mismo resultado que el índice de desproporcionalidad de Loosemore-Hanby (I_{LH}) desde el año 1981, coincidiendo con la prima electoral de Barcelona cambiada de signo.

El índice $I_{|s|max}$ es también la máxima diferencia absoluta, en un espacio n-dimensional, entre las coordenadas del punto real $\xi = (\xi_1, \ldots,\xi_n)$ y las del punto ideal $\vec{\pi} = (\pi_1,\ldots,\pi_n)$.

IG6. Índices de desproporcionalidad del máximo coste electoral absoluto y relativo

El índice de desproporcionalidad del máximo coste electoral absoluto corresponde al máximo coste electoral territorial absoluto de las circunscripciones (o partidos), esto es:

$$I_{c_{max}} = \max_{i\in I}\left\{ c_i \right\} = \max_{i\in I}\left\{ \frac{p_i}{x_i} \right\} \tag{13}$$

El índice $I_{c_{max}}$ simboliza el coste electoral territorial de la circunscripción con menor representación. El valor del $I_{c_{max}}$ territorial del Parlamento de Cataluña 2024 es:

$$I_{Cmax}\left(C_{2024}\right) = \max_{i\in I}\left\{ 69.234, 48.351, 30.109, 30.109, 47.673 \right\}$$
$$= 69.234$$

el cual coincide con el coste electoral territorial de la provincia de Barcelona, siendo el coste promedio en Cataluña igual a 59.382 habitantes por escaño en 2024.

Por su parte, el índice de desproporcionalidad del máximo coste electoral relativo se calcula dividiendo $I_{c_{max}}$ por el coste electoral medio del Territorio $\bar{c}$, esto es:

$$I_{cr_{max}} = \frac{I_{c_{max}}}{\bar{c}} = \max_{i\in I}\left\{ \frac{c_i}{\bar{c}} \right\} = \max_{i\in I}\left\{ \frac{q_i}{x_i} \right\} = \max_{i\in I}\left\{ cr_i \right\} \tag{14}$$

El índice $I_{cr_{max}}$ es el coste relativo, respecto al coste medio, de la circunscripción peor representada. Para 2024 el valor del $I_{cr_{max}}$ territorial del Parlamento de Cataluña es:

$$I_{Crmax}\left(C_{2024}\right) = \frac{69.234}{59.382} = \max_{i\in I}\left\{ 1{,}17; 0{,}81; 0{,}51; 0{,}80 \right\} = 1{,}17$$

el cual coincide con el coste relativo de la provincia de Barcelona.

IG7. Índice de desproporcionalidad de la máxima relación de ventaja

Corresponde a la máxima relación de ventaja (índice de representación poblacional) del conjunto de circunscripciones (o partidos), esto es:

$$I_{r_{max}} = \max_{i \in I}\left\{ r_i \right\} = \max_{i \in I}\left\{ \frac{\xi_i}{\pi_i} \right\} = \max_{i \in I}\left\{ \frac{x_i}{q_i} \right\} \qquad (15)$$

El índice $I_{r_{max}}$ es la relación de ventaja de la circunscripción más sobrerrepresentada. Para el año 2024 el valor del $I_{r_{max}}$ del Parlamento de Cataluña es:

$$I_{r_{max}}\left(C_{2024}\right) = \max_{i \in I}\left\{0{,}86; 1{,}23; 1{,}97; 1{,}25\right\} = 1{,}97$$

que coincide lógicamente con la relación de ventaja de la provincia de Lleida.

IG8. Índice de desproporcionalidad del máximo esfuerzo electoral relativo

Corresponde al máximo esfuerzo territorial relativo del conjunto de circunscripciones o de partidos políticos (Bautista 2023), esto es:

$$I_{e_{max}} = \max_{i \in I}\left\{ e_i \right\} = \max_{i \in I}\left\{ \frac{c_i}{c_{min}} \right\} : c_{min} = \min_{i \in I} c_i, \qquad (16)$$

El índice $I_{e_{max}}$ simboliza el esfuerzo territorial relativo de la circunscripción con menor representación, es decir: el esfuerzo de la circunscripción más infrarrepresentada. Para el año 2024 el valor del $I_{e_{max}}$ territorial del Parlamento de Cataluña es:

$$I_{e_{max}}\left(C_{2024}\right) = \max_{i \in I}\left\{2{,}30; 1{,}61; 1{,}00; 1{,}58\right\} = 2{,}30$$

el cual coincide con el esfuerzo territorial relativo de la provincia de Barcelona, siendo el esfuerzo promedio en Cataluña igual a 1,97 respecto a la provincia de Lleida.

A modo de resumen de cálculos, en la Tabla 2 se muestra el valor de los 9 índices de desproporcionalidad territorial en el Parlamento de Cataluña para el censo del año 2024.

Tabla 2. Índices de desproporcionalidad territorial. Parlamento de Cataluña (Censo 2024).

I_{LH}%	I_{Rae}%	I_{Gal}%	I_{SL}%	$I_{\|s\|max}$%	$I_{r_{max}}$	$I_{cr_{max}}$	$I_{e_{max}}$	$I_{c_{max}}$
10,45	5,22	8,70	7,99	10,45	1,97	1,17	2,30	69.234

Los índices globales de desproporcionalidad del poder territorial (IG1 a IG8) son funciones temporales que dependen de la población del territorio, del reparto de escaños entre provincias y de la dimensión de la cámara. La evolución temporal de tales índices se muestra en las Figuras 5 y 6.

La Figura 5 refleja que la desproporcionalidad del poder territorial en el Parlamento de Cataluña se ha reducido sustancial y paulatinamente desde 1981 según los índices I_{LH}, I_{Rae}, I_{Gal}, I_{SL} y $I_{|s|_{max}}$. Este hecho se debe en gran medida a la

Figura 5. Índices globales de desproporcionalidad del poder territorial I_{LH}, I_{Rae}, I_{Gal}, I_{SL} y $I_{|s|_{max}}$ del Parlamento de Cataluña 1981-2024. Los valores de I_{LH} y $I_{|s|_{max}}$ son idénticos entre sí, en este caso.

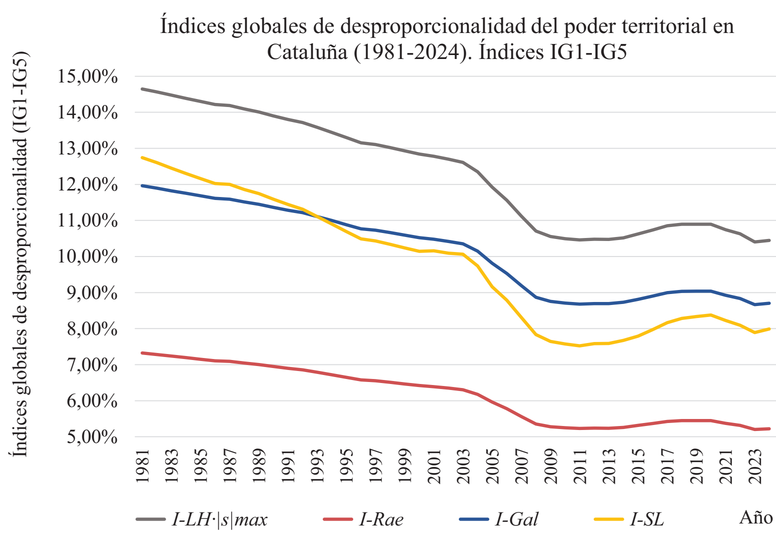
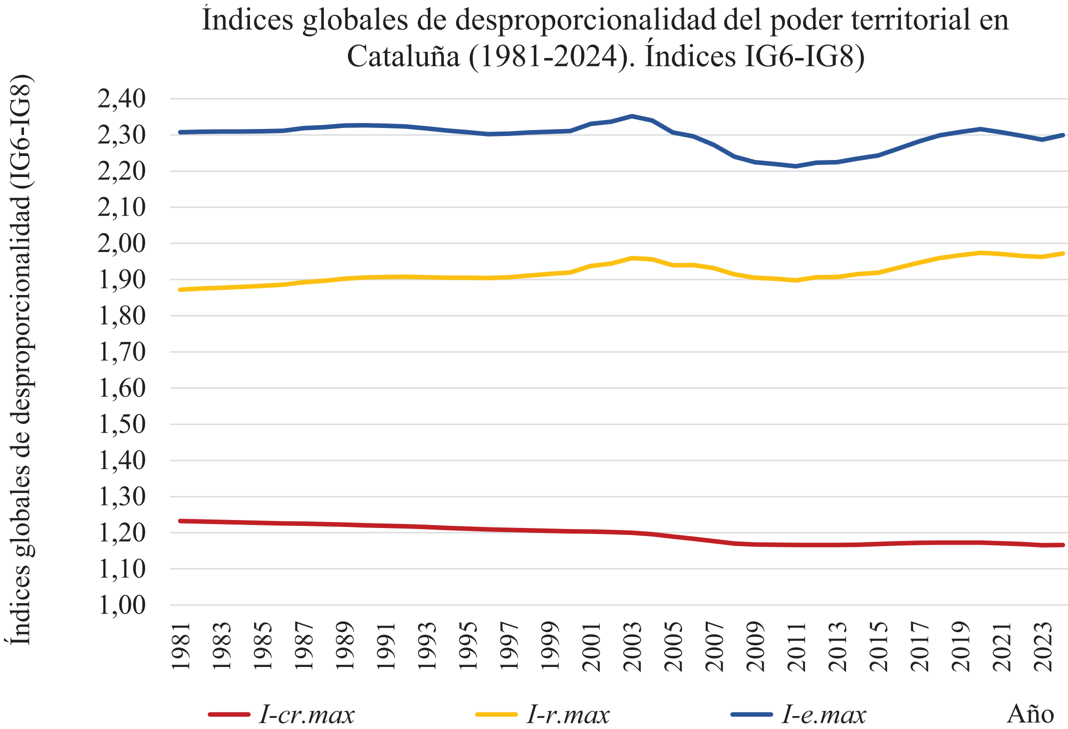


Figura 6. Índices globales de desproporcionalidad del poder territorial $I_{cr_{max}}$, $I_{r_{max}}$ y $I_{e_{max}}$ del Parlamento de Cataluña 1981-2024.



pérdida de representación de Girona (r_G) y Tarragona (r_T) durante estos años (ver Figura 4).

Por su parte, las evoluciones temporales de los índices $I_{cr_{max}}$, $I_{r_{max}}$ y $I_{e_{max}}$ (Figura 6) no reflejan de forma clara la reducción de la desproporcionalidad del poder territorial en el Parlamento de Cataluña entre 1981 y 2024, pues en el cálculo de tales índices sólo participan las provincias de Lleida ($I_{r_{max}}$) y de Barcelona ($I_{cr_{max}}$ y $I_{e_{max}}$).

Observación-2: Las métricas globales de desproporcionalidad territorial, IG1 a IG8, son adaptables al conjunto de fuerzas políticas sustituyendo la población total P por el número total de votos V en unas elecciones, y el vector poblacional $\vec{p} = (p_1,\dots,p_n)$ por el vector de votos obtenidos por las fuerzas políticas $\vec{v} = (v_1,\dots,v_n)$.

4. Modelos y métodos de reparto proporcional

4.1. Modelos de optimización para el problema de reparto proporcional

El problema del reparto proporcional tiene numerosas aplicaciones en el ámbito de la Ingeniería Industrial, como la resolución de problemas de planificación, programación y secuenciación regular de operaciones de producción en contexto Just-in-Time (Bautista et al. 1996, 2001; Bautista 2020, 2021) aunque, es en el ámbito político donde tienen lugar las primeras aportaciones formalizadas a este problema a finales del siglo XVIII en los emergentes Estados Unidos de América, cuando sus gobernantes decidieron calcular el número de escaños que debía asignarse a cada estado miembro de la Unión, dentro de la Cámara de representantes, atendiendo al principio igualitario "*un hombre, un voto*".

En abstracto, el problema puede formalizarse así: dados un entero H y un conjunto I de n elementos con una asignación de valores positivos, $q_i (i = 1,\dots,n)$, denominados cuotas, que cumplen $\sum_{\forall i} q_i = H$, el problema del reparto proporcional consiste en hallar un conjunto de n valores enteros y no negativos, $x_i (i = 1,\dots,n)$, tales que $\sum_{\forall i} x_i = H$, y que sean lo más parecidos posible a sus correspondientes cuotas q_i (i.e. $x_i \cong q_i \forall i \in I$).

En la práctica, el valor entero H suele corresponder al número de unidades disponibles de un recurso escaso, el conjunto I de n elementos representa a los receptores del recurso y los valores de las cuotas q_i se determinan proporcionalmente a unos atributos positivos asociados a los elementos del conjunto I.

En el ámbito político, un sistema de representación se considera proporcional si el número de escaños x_i que se asigna a cada circunscripción, o a cada fuerza política, está ajustado a su cuota de poder correspondiente q_i, es decir: $x_i \cong q_i \; \forall i \in I$. Estas cuotas de poder, si se atiende al principio de equidad, se determinan a partir de la población

$\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ de cada territorio, o a partir del número de votos $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ que obtiene cada fuerza política en un concurso electoral.

Las condiciones $x_i \cong q_i \forall i \in I$ permiten interpretar el problema de reparto proporcional como un problema de optimización de una función $F(\cdot)$ dependiente de la terna $(\vec{x}, \vec{q}, H)$ y sujeta a restricciones; su formulación corresponde al siguiente programa matemático.

Pm-rp:

$$\min \mathcal{F}(\cdot) = \mathcal{F}(\vec{x}, \vec{q}, H) \tag{17}$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = H \tag{18}$$

$$x_i \in Z^+ \cup \{0\}, \quad \forall i = 1, \ldots, n \tag{19}$$

El modelo **Pm-rp** incluye los siguientes conceptos. La función objetivo (17) corresponde a la minimización de la función $F(\cdot)$ que mide una distancia entre el punto ideal de reparto proporcional $\vec{q}$ y un punto real de reparto $\vec{x}$. La igualdad (18) fuerza el reparto de todos los escaños de la Cámara (H) entre el conjunto de circunscripciones, o fuerzas políticas. Y las restricciones (19) establecen la integridad no negativa de las variables x_i.

La función objetivo $F(\cdot)$ de desproporcionalidad del reparto territorial – fórmula (17) – puede ser cualquier métrica global de desproporcionalidad territorial (IG1 a IG8), o cualquier otra métrica de distancia ente el punto real $\vec{x}$ y el punto ideal $\vec{q}$.

4.2. Métodos de reparto de escaños en cámaras de representantes

Un método de reparto proporcional es una fórmula matemática – en realidad, un algoritmo bien pautado o procedimiento determinista- cuya misión es transformar la población de las circunscripciones o los votos de las fuerzas políticas en escaños. Los métodos de reparto constituyen el grueso de los sistemas electorales.

En el art. 162 de la Ley Orgánica 5/1985, de 19 de junio, del Régimen Electoral General (LOREG 5/1985), se establece una forma de repartir el número de diputados entre las provincias españolas para constituir la cámara de representantes. Si se prescinde de la asignación mínima inicial a cada circunscripción, la cual distorsiona la proporcionalidad, el método de reparto de escaños allí propuesto puede resumirse en los siguientes pasos:

1. Se obtiene una cuota de reparto (Q) dividiendo la población total (P) por el número de escaños a repartir); esto es: $Q = P/H$.
2. Se determina la cuota de cada provincia (q_i $\forall i$) dividiendo la población de derecho provincial (p_i $\forall i$) por la cuota de reparto (Q); esto es: $q_i = p_i/Q$ $\forall i \in I$.
3. Se adjudican a cada provincia tantos Diputados (x_i^0 $\forall i$) como la parte entera de sus cuotas provinciales (q_i $\forall i$); esto es: $x_i^0 = \lfloor q_i \rfloor$ $\forall i \in I$.
4. Los Diputados restantes $R = H - \sum_{\forall i} x_i^0$ se asignan de uno en uno a las provincias que tengan restos o fracciones decimales mayores: $\varphi_i = q_i - x_i^0$ $\forall i \in I$
5. Tras la asignación anterior, se obtiene el reparto final de escaños, sea $x_i \forall i \in I$.

La aplicación del método propuesto en el art. 162 de la LOREG 5/1985 (sin asignación mínima) al censo de Cataluña del año 2024 ofrece los resultados que se muestran en la Tabla 3.

El procedimiento descrito corresponde al método de Alexander Hamilton (1755-1804), también llamado método de los *Restos Mayores*, cuya primera propuesta se remonta a 1792 en los entonces emergentes Estados Unidos de América.

Una propiedad interesante de algunos métodos de reparto proporcional es la *propiedad cuota* (Balinski y Young 1975). cuya definición es la que sigue:

Se dice que una solución entera de reparto $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ satisface la *propiedad cuota* respecto a las cuotas o valores ideales $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ si se cumple:

$$\lfloor q_i \rfloor \le x_i \le \lceil q_i \rceil \forall i = (1, \ldots, n) \tag{20}$$

donde $\lfloor q_i \rfloor$ es el mayor número entero menor o igual que q_i (entero por defecto) y $\lceil q_i \rceil$ es el menor número entero mayor o igual que q_i (entero por exceso).

Si se cumple: $x_i \ge \lfloor q_i \rfloor \forall i$, se dice que $\vec{x}$ satisface la *propiedad cuota inferior*.

Si se cumple: $x_i \le \lceil q_i \rceil \forall i$, se dice que $\vec{x}$ satisface la *propiedad cuota superior*.

Las soluciones ofrecidas por el método de Hamilton satisfacen la *propiedad cuota* por la forma de construirlas (ver Tabla 3).

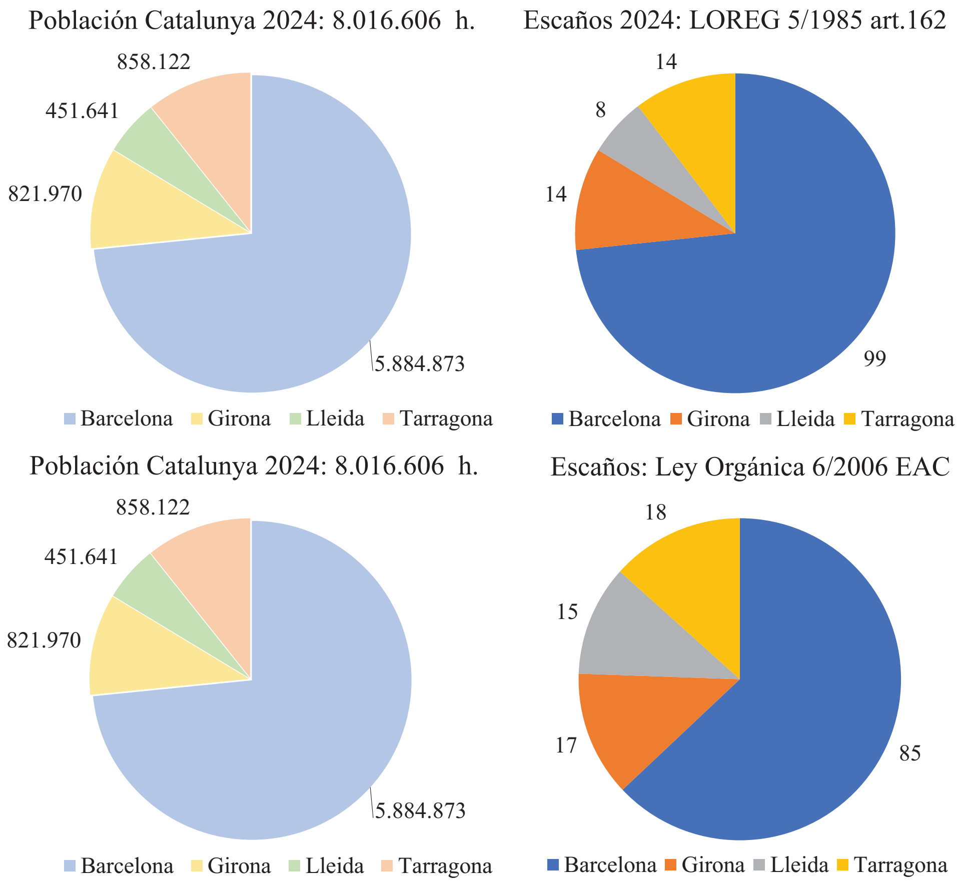
En la Figura 7 se compara la conversión en escaños del censo de Catalunya de 2024 según la LOREG con la asignación actual (Ley Orgánica 6/2006: Estatuto de Autonomía).

La Figura 7 pone en evidencia que la distribución actual de escaños en el Parlamento de Catalunya ($x_B = 85$, $x_G = 17$, $x_L = 15$, $x_T = 18$) difiere sustancialmente del reparto de poder que otorga a cada provincia el método de Hamilton o de los Restos Mayores), el cual equivale al

Tabla 3. Método de Hamilton o Restos Mayores. Población (p_i $\forall i$) de las provincias catalanas (Censo 2024). Cuota provincial (q_i $\forall i$). Parte entera de la cuota provincial ($x_i^0 \forall i$). Fracción decimal de la cuota provincial (φ_i $\forall i$). Reparto final de escaños (x_i $\forall i$). Y coste territorial (c_i) de cada provincia.

Censo CAT-2024	Barcelona	Girona	Lleida	Tarragona	Cataluña
Población (p_i)	5.884.873	821.970	451.641	858.122	8.016.606
Cuotas (q_i)	99,10	13,84	7,61	14,45	135
Enteros (x_i^0)	99	13	7	14	133
Fracciones (φ_i)	0,10	0,84	0,61	0,45	2
Reparto (x_i)	**99**	**14**	**8**	**14**	**135**
Hab. / Escaño (c_i)	59.443,16	58.712,14	56.455,13	61.294,43	59.382,27

Figura 7. Arriba: conversión en escaños de la población de Cataluña en el año 2024 (LOREG 5/1985 art.162, sin asignación mínima de escaños: método de Hamilton). Abajo: distribución actual de escaños en el Parlament de Catalunya (Ley Orgánica 6/2006: Estatuto de Autonomía de Cataluña, 2006).



procedimiento propuesto en el art. 162 de la LOREG 5/1985 sin asignaciones mínimas iniciales.

En cuanto a la optimización (ver **Pm-rp**), el método de Hamilton minimiza la suma de diferencias absolutas $|x_i - q_i| (\forall i)$ elevadas a cualquier potencia $p \geq 1$. En particular, Hamilton minimiza la suma de diferencias absolutas ($p = 1$) y la suma de diferencias cuadráticas ($p = 2$). En general, Hamilton minimiza la distancia de Minkowski de orden $p \geq 1$ entre el punto de reparto $\vec{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ y el punto de cuotas $\vec{q} = (q_1,\ldots,q_n)$:

$$minF_H(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} \left| x_i - q_i \right|^p ; minF_H(\cdot) = \left(\sum_{i=1}^{n} \left| x_i - q_i \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} (p \geq 1) \tag{22}$$

En el art. 163 de la LOREG 5/1985 se describe y aplica la Ley de Victor D'Hondt (1841-1901) que equivale al método propuesto en 1794 por Thomas Jefferson (1743-1826) y que sirve también para repartir escaños entre territorios o entre fuerzas políticas.

Una forma de aplicar el método de Jefferson consiste en hallar un divisor de reparto D_J, aplicable a todas las provincias, tal que la suma de enteros por defecto de los cocientes entre las poblaciones (p_i $\forall i$) y D_J sea igual al número de escaños a repartir H, esto es:

$$Hallar\ D_J: \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{p_i}{D_J} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{p_1}{D_J} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{p_n}{D_J} \right\rfloor = H \qquad (22)$$

Para el censo de Cataluña del año 2024, se tiene la ecuación (23).

$$\sum_{i=1}^{4} \left\lfloor \frac{p_i}{D_J} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{5.884.873}{D_J} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{821.970}{D_J} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{451.641}{D_J} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{858.122}{D_J} \right\rfloor = 135 \qquad (23)$$

Una solución para la ecuación (23) es $D_J = 58.500hab$, que da lugar a la asignación de escaños: $x_B = 100, x_G = 14, x_L = 7, x_T = 14$, tal como se muestra en la Figura 8.

Otra forma de aplicar el método de Jefferson o Ley de D'Hondt (tal como dispone el art. 163, LOREG) consiste en dividir los votos (v_i) o las poblaciones (p_i) o las cuotas (q_i), en general, por la serie de números enteros $1,2,\ldots,H$; tras ello, se ordenan los cocientes resultantes de mayor a menor en una tabla y se asignan los escaños, uno a uno, a las circunscripciones o a las fuerzas políticas, seleccionando los H cocientes mayores.

El método de Jefferson perjudica a las minorías, puesto que para que una circunscripción (o una fuerza política) obtenga su primer escaño deberá tener una población (o un número de votos) mayor o igual que el mínimo valor de D_J que satisface la ecuación (22).

El método de Jefferson satisface la propiedad cuota inferior, pues sus soluciones cumplen la condición: $x_i \geq \lfloor q_i \rfloor \forall i$.

En cuanto a optimización, el método de Jefferson minimiza la máxima relación de ventaja y también maximiza el mínimo coste electoral relativo, entre otras funciones, esto es:

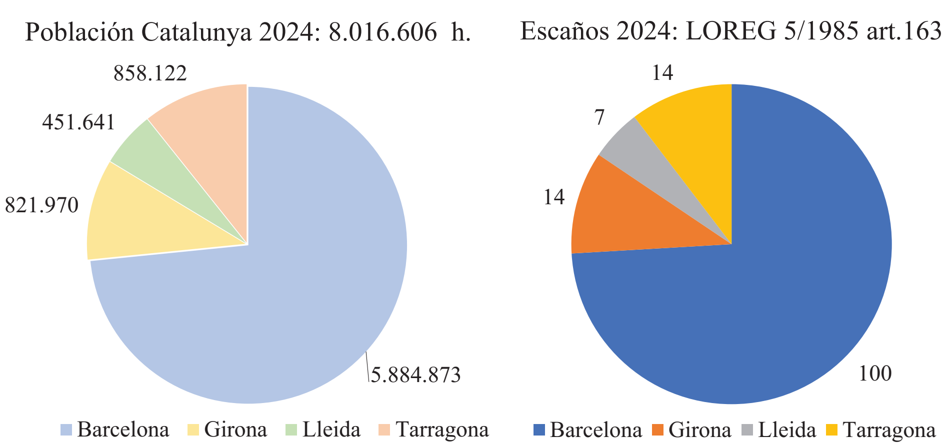
$$\begin{aligned} minF_J(\bullet) &= \max_{i \in I} \{r_i\} = \max_{i \in I} \left\{\frac{x_i}{q_i}\right\} \Leftrightarrow maxG_J(\bullet) \\ &= \min_{i \in I} \{cr_i\} = \min_{i \in I} \left\{\frac{q_i}{x_i}\right\} \end{aligned} \qquad (24)$$

También tiene sentido el reparto que minimiza el máximo coste electoral relativo o que maximiza la mínima relación de ventaja, tal como se muestra en la fórmula (25).

$$\begin{aligned} minF_A(\bullet) &= \max_{i \in I} \{cr_i\} = \max_{i \in I} \left\{\frac{q_i}{x_i}\right\} \Leftrightarrow maxG_A(\bullet) \\ &= \min_{i \in I} \{r_i\} = \min_{i \in I} \left\{\frac{x_i}{q_i}\right\} \end{aligned} \qquad (25)$$

En este caso, nos encontramos ante un método de reparto que se remonta a 1832 conocido como método de John Quincy Adams (1767-1848) o de los *Divisores Pequeños.*

Figura 8. Conversión en escaños de la población de Catalunya en el año 2024 (LOREG 5/1985 art.163, sin asignación mínima de escaños: Ley de D'Hondt / método de Jefferson).



El método de Adams puede aplicarse al menos de dos formas.

La primera forma consiste en determinar un divisor de reparto D_A, idéntico para todas las provincias, tal que la suma de enteros por exceso de los cocientes entre las poblaciones ($p_i\ \forall i$) y D_A sea igual al número de escaños a repartir H, esto es:

$$Hallar\, D_A : \sum_{i=1}^{n} \left\lceil \frac{p_i}{D_A} \right\rceil = \left\lceil \frac{p_1}{D_A} \right\rceil + \cdots + \left\lceil \frac{p_n}{D_A} \right\rceil = H \tag{26}$$

Para el censo de Cataluña del año 2024, se tiene la ecuación (27).

$$\sum_{i=1}^{n} \left\lceil \frac{p_i}{D_A} \right\rceil = \left\lceil \frac{5.884.873}{D_A} \right\rceil + \left\lceil \frac{821.970}{D_A} \right\rceil + \left\lceil \frac{451.641}{D_A} \right\rceil + \left\lceil \frac{858.122}{D_A} \right\rceil = 135 \tag{27}$$

Una solución para la ecuación (27) es $D_A = 60.500hab$ con la asignación de escaños correspondiente: $x_B = 98$, $x_G = 14$, $x_L = 8$, $x_T = 15$, tal como se muestra en la Figura 9.

La segunda forma de aplicar el método de Adams consiste en dividir las cuotas (q_i) por la serie de números enteros $0, 1, \ldots, H\text{-}1$, ordenar los cocientes resultantes de mayor a menor y asignar los escaños, uno a uno, a las circunscripciones o a las fuerzas políticas, seleccionando los H cocientes mayores.

El método de Adams beneficia a las minorías, ya que la división por 0 (primer número de la serie de Adams) fuerza la asignación de un primer escaño a toda circunscripción o a toda fuerza política independientemente del número de habitantes o del número de votos, siempre, claro está, que H sea mayor o igual que n.

El método de Adams satisface la propiedad cuota superior, pues sus soluciones cumplen la condición: $x_i \leq \lceil q_i \rceil \forall i$.

Otro método de reparto proporcional en sintonía con los métodos de Jefferson y Adams es el método de Daniel Webster (1782-1852), cuya primera propuesta se remonta a 1832, siendo conocido en Europa como el método de André Saint-Laguë (1882-1950) o *método de los Divisores Impares*.

También, el método de Webster puede ser aplicado al menos de dos formas distintas.

La primera forma consiste en determinar un divisor de reparto D_W, igual para todas las provincias, tal que la suma de enteros por redondeo estándar de los cocientes entre las poblaciones ($p_i\ \forall i$) y D_W sea igual al número de escaños a repartir H, esto es:

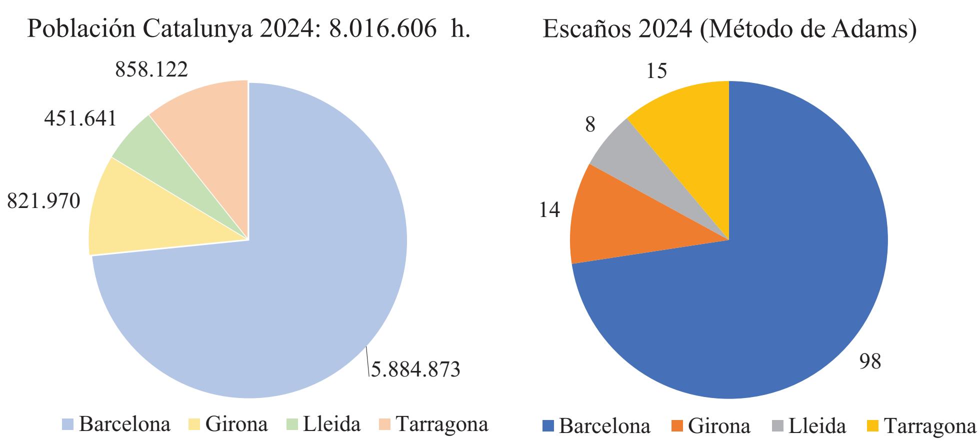
$$Hallar\ D_W : \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{p_i}{D_W} \right] = \left[\frac{p_1}{D_W} \right] + \cdots + \left[\frac{p_n}{D_W} \right] = H \tag{28}$$

Para el censo de Cataluña del año 2024, se tiene la ecuación (29).

$$\sum_{i=1}^{4} \left[\frac{p_i}{D_W} \right] = \left[\frac{5.884.873}{D_W} \right] + \left[\frac{821.970}{D_W} \right] + \left[\frac{451.641}{D_W} \right] + \left[\frac{858.122}{D_W} \right] = 135 \tag{29}$$

Una solución posible para la ecuación (29) es $D_W = 59.500hab$, siendo la distribución de escaños correspondiente: $x_B = 99$, $x_G = 14$, $x_L = 8$, $x_T = 14$, la cual coincide, en este caso, con la solución del método de Hamilton o de

Figura 9. Conversión en escaños de la población de Catalunya en el año 2024 (Método de Adams).



los Restos Mayores (véase Figura 7, gráfico Escaños 2024: LOREG 5/1985 art.162).

La segunda forma de aplicar el método de Webster (o de Saint-Laguë) consiste en dividir las cuotas (q_i) por la serie de números enteros $1,3,5,\ldots,2H-1$, ordenar los cocientes resultantes de mayor a menor y asignar los escaños, uno a uno, a las circunscripciones o a las fuerzas políticas, seleccionando los H cocientes mayores.

Observación-3: La división de las cuotas (q_i) por la serie $1,3,5,\ldots,2H-1$ o por la sucesión $0{,}5;1{,}5;2{,}5;\ldots;H-0{,}5$, conduce a la misma solución de distribución de escaños; este hecho permite definir la serie de Webster, en su forma genuina, como la *sucesión semisuma*, o *sucesión media aritmética*, de las series de Adams y de Jefferson.

En cuanto a optimización, el método de Webster minimiza la suma de cocientes entre las diferencias cuadráticas $(x_i - q_i)^2$ $(\forall i)$ y las cuotas (q_i) correspondientes (30).

$$minF_W(\bullet) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - q_i)^2}{q_i} \tag{30}$$

Cabe también la posibilidad de dividir las cuotas (q_i) por la *sucesión media geométrica* de las series de Adams y de Jefferson, esta es: $0;1{,}41;2{,}45;\ldots;\sqrt{H(H-1)}$. En este caso se obtiene el método de Joseph Hill (1911), o de Hill-Huntington, que optimiza entre otras la función (31).

$$minF_{HH}(\bullet) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - q_i)^2}{x_i} \tag{31}$$

Y también, las cuotas (q_i) pueden dividirse por la *sucesión media armónica* de las series de Adams y de Jefferson, esta es: $0;1{,}33;2.40;\ldots;H(H+1)/(H+0{,}5)$, que da lugar al método de James Dean (1832), el cual optimiza localmente la función (32).

$$minF_D(\bullet) = \max_{\{i,j\}\subseteq I} \left| \frac{q_i}{x_i} - \frac{q_j}{x_j} \right|, \textit{optimización local: 2- opt} \tag{32}$$

Los métodos de Adams, Dean, Hill, Webster y Jefferson constituyen los 5 métodos de reparto tradicionales de Edward Huntington (1874-1952).

Los métodos tradicionales de Huntington se aplican fijando un reparto inicial de escaños $\vec{x}$ factible: $\sum_{\forall i} x_i = H$, transfiriendo escaños, de uno en uno, entre todo par (i,j) de elementos de I mientras mejore la *proporcionalidad perfecta*, la cual se puede representar de varias formas, por ejemplo: $x_i/q_i = x_j/q_j$ $\forall (i,j)$. Entonces, si el elemento $i \in I$ está sobrerrepresentado respecto al elemento $j \in I$, es decir: $x_i/q_i > x_j/q_j$, se determinan los índices δ_1 y δ_2 así:

$$\delta_1 = \left| \frac{x_i}{q_i} - \frac{x_j}{q_j} \right|; \delta_2 = \left| \frac{x_i - 1}{q_i} - \frac{x_j + 1}{q_j} \right| \tag{33}$$

Y si se cumple $\delta_2 < \delta_1$, se transfiere un escaño de $i \in I$ a $j \in I$, y así se procede hasta que no se produzca mejora con la transferencia de escaños entre pares de elementos de I.

Los métodos de Huntington son casos particulares de la clase denominada *Métodos de los Divisores*. En la Tabla 4 se muestran las características de varios métodos divisores que se utilizan o han sido propuestos en sistemas electorales.

Los Métodos de los Divisores son una clase de procedimientos de reparto proporcional, cuyos resultados dependen del criterio divisor que se utilice. Existen infinitos métodos divisores (Balinski y Young 2001), entre los que se encuentran los cinco métodos tradicionales de Huntington, el método belga, el método de Saint-Laguë y el método de Saint-Laguë modificado (ver Tabla 4).

Observación-4: La división de las cuotas (q_i) por la serie $1,3,5,\ldots,2H$-1 o por la sucesión $1{,}4;3;5;\ldots;2H$-1, conduce a la misma solución de distribución de escaños a partir de la asignación del primer escaño ($x \geq 1$), por tanto, el método Sainte-Laguë^M es equivalente al de Sainte-Laguë y al de Webster a partir de la asignación del primer escaño.

Cada método se asocia con un criterio divisor. Un criterio divisor es una función real $d(x)$ definida sobre los números enteros $x = 0,1,\ldots,H$ de forma que satisfaga la *condición de monotonía creciente:* $d(x) < d(x+1) \forall x$.

Un criterio divisor $d(x)$ es considerado *propio* de un método de reparto proporcional si además de ser monótono creciente cumple la *condición de pertenencia a los intervalos*: $d(x)\in[x,x+1], \forall x = 0,1,\ldots,H$, donde x simboliza el número de escaños asignados a una circunscripción o a una fuerza política genéricas.

Observación-5: El divisor del método *belga*, $d(x) = (x+2)/(2)$, incumple la condición de pertenencia a intervalo: $d(x)\in[x,x+1]\forall x$, a partir de la asignación del tercer escaño ($x \geq 3$), por tanto, tal método no puede ser considerado de reparto proporcional.

Los métodos de Huntington siguen el principio "*una persona, un voto*", e interpretan que este se cumple cuando los cocientes entre cuotas (q_i) y escaños correspondientes (x_i) se aproximan a la unidad: ($q_i/x_i \cong 1$).

Tal propósito puede conseguirse minimizando el valor máximo de los cocientes $q_i/d(x_i)$. Esto da lugar a un problema de optimización *minimax* con variables enteras. La función objetivo genérica (17) del modelo **Pm-rp** se concreta así:

$$min\ \mathcal{F}(\cdot) = \max_{i \in I} \left\{ \frac{q_i}{d(x_i)} \right\}:\ d(x) \in [x, x+1] \wedge d(x) < d(x+1), \forall x \tag{34}$$

Tabla 4. Atributos de varios métodos divisores prácticos en sistemas electorales.

Nombre	$d(x_i){:}x_i = 0,1,\ldots,H$	*Serie de divisores*	*País*
Adams (1832)	x_i	0, 1, 2, 3, 4, …	USA
Dean (1832)	$x_i\,(x_i{+}1)/(x_i{+}0{,}5)$	0, 1.33, 2.40, 3.43, …	USA
Hill (1911)	$\sqrt{x_i\left(x_i+1\right)}$	0, 1.41, 2.45, 3.46, …	USA
Webster (1832)	$x_i + 0{,}5$	0.5, 1.5, 2.5, 3.5 …	USA
Jefferson (1794)	$x_i + 1$	1, 2, 3, 4, 5, …	ES, FR
Sainte-Laguë (1910)	$2x_i + 1$	1, 3, 5, 7, 9 …	DE, SE
Sainte-Laguë^M (s/f)	$1.4,\ldots,(2x_i + 1)$	1.4, 3, 5, 7, 9 …	DE, SE
Belga (s/f)	$(x_i + 2)/2$	1, 1.5, 2, 2.5, 3 …	BE

Tabla 5. Distribución de escaños por varios métodos de reparto en el Parlamento de Cataluña (2024). Las soluciones que ofrecen los métodos de Sainte-Laguë y Sainte-Laguë^M son idénticas a la de Webster.

Territorio	*L 6/2006*	*Hamilton*	*Adams*	*Dean*	*Hill*	*Webster*	*Jefferson*	*Belga*
Barcelona	85	99	98	99	99	99	100	102
Girona	17	14	14	14	14	14	14	13
Lleida	15	8	8	8	8	8	7	6
Tarragona	18	14	15	14	14	14	14	14
Cataluña	135	135	135	135	135	135	135	135

Esta simplificación permite definir infinitos métodos de reparto proporcional que pueden ser aplicados utilizando el mismo algoritmo (**A1**).

Algoritmo A1: Método de los Divisores (Reparto de escaños entre territorios)

Paso 0: Definir criterio divisor $d(x)$: $d(x) < d(x + 1), d(x) \in [x, x + 1] \forall x$.

Paso 1: Hacer $x_i = 0\ \forall i \in I$. Poner a cero el contador de reparto de escaños: $k = 0$.

Paso 2: Calcular las cuotas de los territorios: $q_i = H(p_i/P) \forall i \in I$.

Paso 3: Calcular los cocientes: $\delta_i = q_i/d(x_i)\ \forall i \in I$. Si $d(x_i) = 0$, Hacer $\delta_i \to \infty$ (por ejemplo, $\delta_i = 10^{12}$).

Paso 4: Determinar el territorio con mayor cociente: $i^* = argmax_{i\in I}\{\delta_i\}$.

Paso 5: Asignar escaño al territorio i^*: Hacer $x_{i^*} \leftarrow x_{i^*} + 1$. Actualizar el contador de escaños: $k \leftarrow k + 1$.

Paso 6 Test de finalización: Si $k \le H$, Ir a Paso 3; Si no, Finalizar.

Observación-6: El algoritmo **A1** se puede adaptar a las fuerzas políticas sustituyendo la población total P por el número total de votos V, y las cuotas territoriales $H(p_i \mid P)\ \forall i$ por las cuotas de las fuerzas políticas $H(v_i \mid V)\ \forall i$.

5. Métodos e Índices en el Parlamento de Cataluña

5.1. Distribución territorial de escaños en el Parlamento de Cataluña

A modo de resumen, en la Tabla 5 se recogen los resultados de aplicar los métodos de reparto de escaños descritos anteriormente (ap. 4.2) en el Parlamento de Cataluña para el censo 2024. En la Figura 10 se muestran gráficamente estos mismos resultados agrupados por métodos y en la Figura 11 agrupados por circunscripciones.

A la vista de la Tabla 5 (o de las figuras 10 y 11), se puede afirmar:

1. La Ley Orgánica 6/2006 perjudica a Barcelona respeto a todos los métodos de reparto utilizados, transfiriendo escaños a las otras tres provincias.
2. Los métodos de Hamilton, Dean, Hill y Webster ofrecen la misma solución de reparto de escaños para las provincias en el Parlamento de Cataluña considerando el censo del año 2024; esta es: $x_B = 99$, $x_G = 14$, $x_L = 8$, $x_T = 14$.
3. El método de Adams perjudica a Barcelona respeto al método de Hamilton, recibiendo un escaño menos ($x_B = 98$) que es transferido a Tarragona ($x_T = 15$).
4. El método de Jefferson perjudica a Lleida respeto al método de Hamilton, recibiendo un escaño menos ($x_L = 7$) que es transferido a Barcelona ($x_B = 100$).
5. El método *belga* perjudica a Lleida y a Girona respeto al método de Hamilton, pues Lleida recibe dos escaños menos ($x_L = 6$) y Girona recibe uno menos ($x_G = 13$) que son transferidos a Barcelona ($x_B = 102$).

5.2. Índices de desproporcionalidad territorial en el Parlamento de Cataluña

La injusticia de un método electoral aplicado a un conjunto de territorios se puede definir de muchas maneras, por ejemplo,

Figura 10. Reparto de escaños (135) entre las provincias catalanas (censo 2024) según diversos métodos de reparto y la Ley Orgánica 6/2006 (Estatuto de Autonomía de Cataluña).

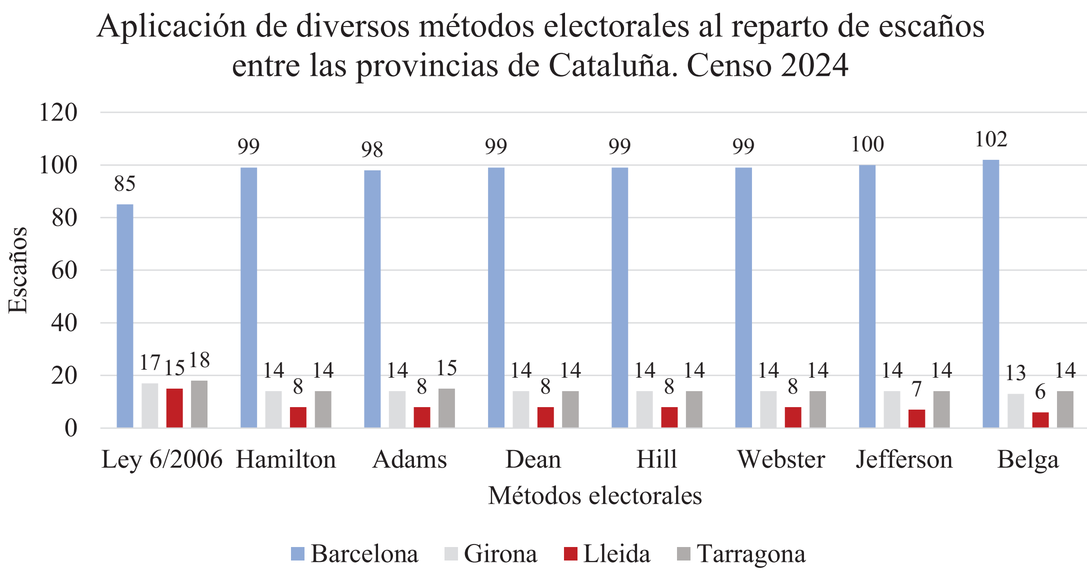
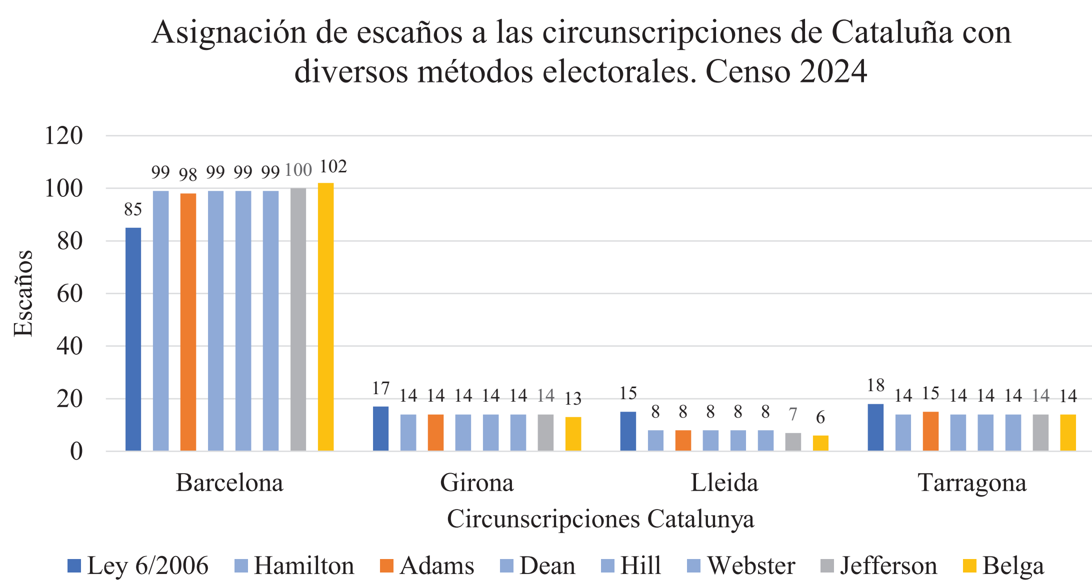


Figura 11. Conversión en escaños de las poblaciones de las provincias catalanas (censo 2024) mediante diversos métodos de reparto y la Ley Orgánica 6/2006 (Estatuto de Autonomía de Cataluña).



mediante el rango del coste electoral territorial relativo: $cr_{max} - cr_{min}$, o el máximo esfuerzo territorial relativo: e_{max}, pues miden la diferencia entre el territorio que le cuesta o se esfuerza más para obtener un escaño y el territorio que le cuesta o se esfuerza menos para conseguir el mismo resultado. En cualquier caso, el método más justo es aquel que minimiza la métrica de injusticia que se defina.

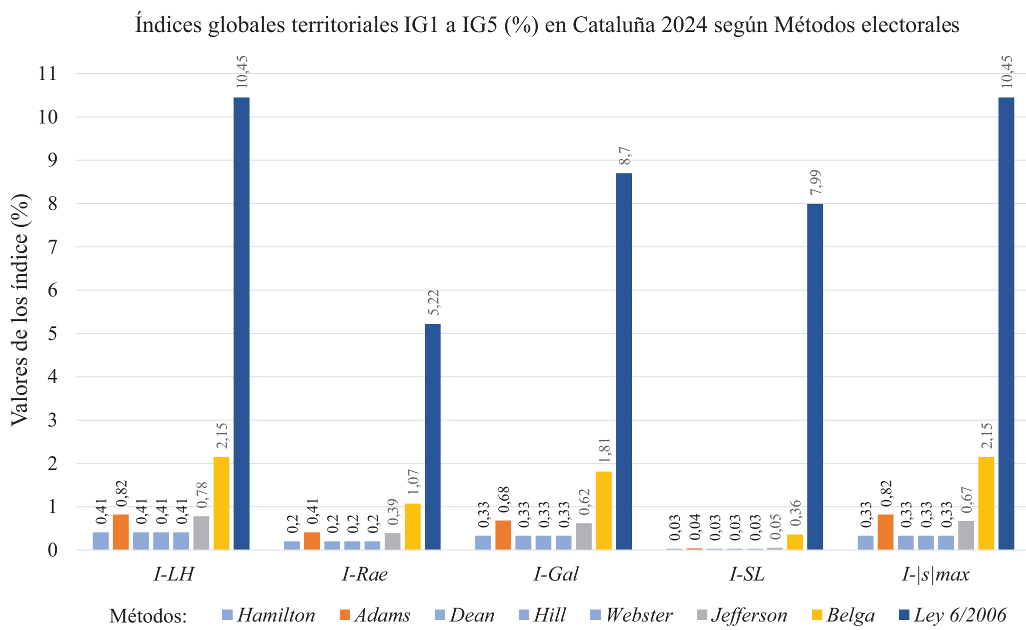
Si asumimos que *injusticia* y *desproporcionalidad* de un método de reparto son vocablos sinónimos, cualquier métrica global de desproporcionalidad del poder territorial adoptada por la comunidad científica es válida para nuestro propósito. Por ello, aplicaremos los índices globales IG1 a IG8 (ap. 3), utilizando diversos métodos de reparto, para medir la desproporcionalidad en el Parlamento de Cataluña (Bautista 2023).

En la Tabla 6 se recogen los resultados correspondientes a los índices globales IG1 a IG8 tras aplicar los métodos de reparto aquí tratados. Los métodos de Hamilton, Dean, Hill y Webster ofrecen el mismo reparto de escaños entre las provincias de Cataluña, y, por tanto, los mismos valores de los índices absolutos y relativos.

Tabla 6. Valores de los índices globales de desproporcionalidad territorial, IG1 a IG8, según diversos métodos de reparto de escaño aplicados al Parlamento de Cataluña (Censo 2024). Los métodos de Hamilton, Dean, Hill y Webster ofrecen la misma solución de reparto en este caso.

	Índices Absolutos					Índices Relativos			Coste
Método\IG#	I_{LH}%	I_{Rae}%	I_{Gal}%	I_{SL}%	$I_{\|s\|max}$%	Icr_{max}	$I_{r_{max}}$	$I_{e_{max}}$	$I_{c_{max}}$
Hamilton	**0,41**	**0,20**	**0,33**	**0,03**	**0,33**	1,03	1,05	1,09	61.294
Adams	0,82	0,41	0,68	0,04	0,82	**1,01**	1,05	**1,06**	**60.050**
Dean	**0,41**	**0,20**	**0,33**	**0,03**	**0,33**	1,03	1,05	1,09	61.294
Hill	**0,41**	**0,20**	**0,33**	**0,03**	**0,33**	1,03	1,05	1,09	61.294
Webster	**0,41**	**0,20**	**0,33**	**0,03**	**0,33**	1,03	1,05	1,09	61.294
Jefferson	0,78	0,39	0,62	0,05	0,67	1,09	**1,01**	1,10	64.520
Belga	2,15	1,07	1,81	0,36	2,15	1,27	1,03	1,30	75.274
Ley 6/2006	10,45	5,22	8,70	7,99	10,45	1,17	1,97	2,30	69.234
Min	0,41	0,20	0,33	0,03	0,33	1,01	1,01	1,06	60.050
Max	10,45	5,22	8,70	7,99	10,45	1,27	1,97	2,30	75.274

Figura 12. Índices globales de desproporcionalidad territorial, IG1 a IG5, según métodos de reparto de escaños aplicados al Parlamento de Cataluña (Censo 2024). Agrupación por tipo de índice.



En la Figura 12 se muestran los resultados gráficos de los índices absolutos IG1 a IG5, según métodos, agrupados por tipo de índice.

A la vista de la Tabla 6 (o de la Figura 12), podemos afirmar lo siguiente respecto a los Índices Absolutos:

1. La Ley Orgánica 6/2006 despunta, sin lugar a dudas, como el peor método de reparto de escaños entre los aquí analizados, cuando se valoran los cinco índices absolutos de desproporcionalidad (IG1 a IG5). Por ejemplo, el valor del índice de Gallagher en el Parlamento de Cataluña (censo 2024) es I_{Gal} = 8,70%, siendo este un valor muy alto respecto a las recomendaciones internacionales que proponen minimizar la distorsión en un parlamento entre la voluntad popular y los escaños que se entregan tanto a los territorios como a los partidos políticos[3].
2. El índice de Gallagher tiene un valor muy alto: I_{Gal} = 8,70%, respecto al 0,33% de Hamilton, Dean, Hill y Webster o el 0,62% de Jefferson o el 0,68% de Adams.
3. El método *belga* es menos proporcional que los métodos de Hamilton, Adams, Dean, Hill, Webster y Jefferson, destacando como peor método de reparto detrás de la Ley Orgánica 6/2006 (Estatuto de Autonomía de Cataluña) al valorar los cinco índices absolutos (IG1 a IG5).

[3] En 2017, el Comité parlamentario de reformas electorales de Canadá recomendó al Gobierno de la nación que procurara elaborar un sistema electoral que diera lugar a repartos de escaños tales que el valor del índice de Gallagher fuera menor o igual al 5% (Recomendación: I_{Gal}≤5%).

4. Los métodos de Hamilton, Dean, Hill y Webster constituyen el conjunto de métodos más proporcional entre los aquí analizados. De hecho, la solución de reparto hallada por cualquiera de estos métodos ($x_B = 99$, $x_G = 14$, $x_L = 8$, $x_T = 14$) es óptima para los índices absolutos: I_{LH}, I_{Rae}, I_{Gal}, I_{SL} y $I_{|s|max}$; esto se debe a la coincidencia de soluciones de los métodos y a dos propiedades:
   (a) Hamilton minimiza los índices I_{LH}, I_{Rae}, I_{Gal}, y $I_{|s|max}$.
   (b) Webster minimiza el índice I_{SL}.
5. El método de Jefferson es más proporcional que el método de Adams según cuatro de los cinco índices absolutos (I_{LH}, I_{Rae}, I_{Gal} y $I_{|s|max}$), siendo poco menos proporcional según el índice de Sainte-Laguë (I_{SL}).
6. La solución de Hamilton es cuota y, por coincidencia de reparto, también son cuota las soluciones de Dean, Hill y Webster, en este caso.

Por su parte, en la Figura 13 se muestran los resultados gráficos de los índices relativos IG6 a IG8, según los métodos de reparto, agrupados por tipo de índice.

A partir de la Tabla 6 (o de la Figura 13), podemos extraer las siguientes conclusiones:

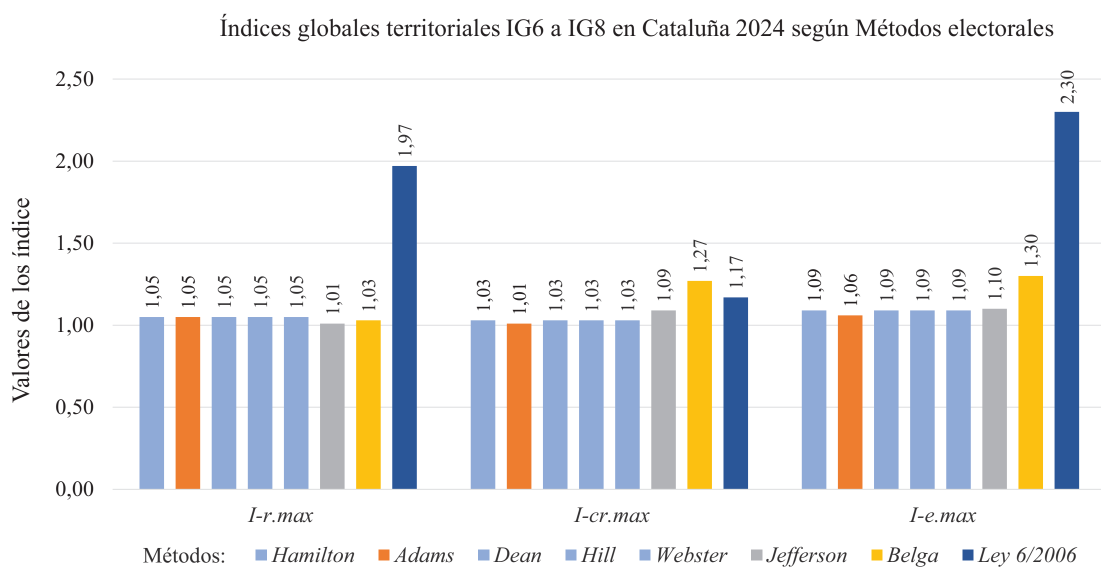
1. El índice del máximo coste electoral relativo $I_{cr_{max}}$ (y absoluto $I_{c_{max}}$) no discrimina en cuanto a la proporcionalidad de los métodos. Según este índice, el sistema electoral vigente (Ley Orgánica 6/2006) es más proporcional que el método belga. El mejor método para este índice es el método de Adams, ya que minimiza el máximo coste electoral relativo y el máximo coste electoral absoluto.
2. El valor del índice de la máxima relación de ventaja asociado a la Ley Orgánica 6/2006 es elevado: $I_{r_{max}} = 1{,}97$, pues hay una provincia (Lleida) casi 2 veces más representada en escaños que lo que le corresponde por cuota poblacional. El mejor método para este índice es el método de Jefferson, ya que minimiza la máxima relación de ventaja.
3. El valor del índice del máximo esfuerzo electoral relativo asociado a la Ley Orgánica 6/2006 es elevado: $I_{e_{max}} = 2{,}30$, pues hay una provincia (Barcelona) que debe hacer un esfuerzo promedio para conseguir un escaño de más del doble que el que realiza la provincia que menos se esfuerza para conseguir lo mismo (Lleida). El valor de este índice está en el rango [1,06; 1,10] para los métodos clásicos de reparto proporcional. Según este índice, el mejor método es el de Adams o de los *Divisores Pequeños*, en este caso de estudio.

6. Conclusiones

Las conclusiones de carácter general que se extraen de este trabajo son:

1. El sistema electoral que establece la composición del Parlamento de Cataluña (Ley Orgánica 6/2006), como representación de las cuatro provincias catalanas (Barcelona, Girona, Lleida y Tarragona), no puede ser considerado como un sistema proporcional por la comunidad científica, según los valores de los índices de desproporcionalidad asociados al reparto actual de escaños en la Cámara de representación catalana.
2. El sistema electoral vigente en Cataluña no cumple el principio "*una persona, un voto*" o bien "*un representante para el mismo número de personas representadas*".
3. Para medir la desproporcionalidad (*malapportionment*) se utilizan diversas métricas globales que agregan las

Figura 13. Índices globales de desproporcionalidad territorial, IG6 a IG8, según métodos de reparto de escaños aplicados al Parlamento de Cataluña (Censo 2024). Agrupación por tipo de índice.



diferencias entre la proporción de escaños asignados a las provincias y la proporción de la población correspondiente, o métricas que determinan el valor máximo de un conjunto de índices parciales.

4. Toda métrica global de desproporcionalidad está asociada a un método de reparto que la optimiza, por tanto, el problema que nos ocupa es un problema de optimización.
5. Ninguna métrica global puede ser considerada mejor que otra, aunque, las métricas de Índices Absolutos detectan mejor la desproporcionalidad al tener en cuenta todos los participantes en el concurso electoral.
6. Ningún método de reparto proporcional minimiza todas las métricas globales a la vez.
7. Para hacer un proyecto de Ley Electoral es más práctico definir el Índice (o índices) que optimizar en lugar de discutir sobre qué método de reparto es mejor o peor.

Y, las conclusiones de carácter particular que se extraen de este trabajo, según el reparto de escaños entre provincias catalanas dentro del Parlamento de Cataluña, son:

1. Los métodos más proporcionales son Hamilton, Dean, Hill y Webster, ofreciendo una misma solución de reparto que es óptima para los cinco índices absolutos, es decir, tal solución minimiza: $I_{LH}, I_{Rae}, I_{Gal}, I_{SL} y I_{|s|max}$, y, además, satisface la propiedad cuota por coincidir con la que ofrece el método de Hamilton.
2. El método menos proporcional de los aquí analizados corresponde al sistema electoral vigente en Cataluña (Ley Orgánica 6/2006), respecto a los cinco índices absolutos.
3. El segundo método menos proporcional es el método *belga*, según la valoración de los cinco índices absolutos.
4. El método menos proporcional corresponde al sistema electoral vigente cuando se valoran el índice de máxima relación de ventaja $I_{r_{max}}$ y el índice de máximo esfuerzo relativo $I_{e_{max}}$.
5. El método menos proporcional corresponde al método belga cuando se tiene en cuenta el índice del máximo coste electoral relativo $I_{cr_{max}}$ o bien el índice del máximo coste electoral absoluto $I_{c_{max}}$.

En cuanto a líneas de trabajo futuro se propone utilizar la metodología descrita en este estudio para analizar la desproporcionalidad del reparto del poder en otros territorios y concursos electorales en los que participan las fuerzas políticas o los representantes de diversos estamentos que constituyen una Organización.

Referencias

BALINSKI, M. L., YOUNG, H. P. (1975). The Quota Method of Apportionment. *The American Mathematical Monthly,* 82(7), 701–730. https://doi.org/10.1080/00029890.1975.11993911

BALINSKI, M. L., YOUNG, H. P. (2001). *Fair Representation: Meeting the Ideal of One Man, One Vote*. Brookings Institution Press, Washington.

BAUTISTA, J. (2020). *Modelos y herramientas de decisión*. DEXTRA Editorial, Madrid.

BAUTISTA, J., COMPANYS, R., COROMINAS, A. (1996). A Note on the Relation between the Product Rate Variation (PRV) Problem and the Apportionment Problem. *Journal of the Operational Research Society*, 47(11), 1410–1414. https://doi.org/10.1057/jors.1996.177

BAUTISTA, J., COMPANYS, R., COROMINAS, A. (2001). Solving the generalized apportionment problem through the optimization of discrepancy functions. *European Journal of Operational Research*, 131(3), 676–684. https://doi.org/10.1016/S0377-2217(00)00110-7

BAUTISTA-VALHONDO, J. (2021). Métodos de planificación y secuenciación Heijunka inspirados en el problema del Reparto en Sistemas electorales. *Dirección y Organización*,73, 18–38. https://doi.org/10.37610/dyo.v0i73.590

BAUTISTA-VALHONDO, J. (2023, 19 de junio). Reparto de poder entre territorios. Caso Parlament de Catalunya (Conferencia). Real Academia Europea de Doctores (RAED), Barcelona, España. https://raed.academy/eventos/reparto-de-poder-entre-territorios-caso-parlament-de-catalunya/

GALLAGHER, M. (1991). Proportionality, disproportionality and electoral systems. *Electoral Studies*, 10(1): 33–51. https://doi.org/10.1016/0261-3794(91)90004-C

GALLAGHER, M. (1992). Comparing Proportional Representation Electoral Systems: Quotas, Thresholds, Paradoxes and Majorities. *British Journal of Political Science*, 22(4),469–496. https://doi.org/10.1017/S0007123400006499

IDESCAT (2024). Instituto de Estadística de Cataluña. https://www.idescat.cat

Ley Orgánica 4/1979, de 18 de diciembre, de Estatuto de Autonomía de Cataluña (BOE núm. 306, de 22 de diciembre de 1979). https://www.boe.es/buscar/doc.php?id=BOE-A-1979-30178

Ley Orgánica 5/1985, de 19 de junio, del Régimen Electoral General (BOE núm. 147, de 20 de junio de 1985). https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-1985-11672

Ley Orgánica 6/2006, de 19 de julio, de reforma del Estatuto de Autonomía de Cataluña (BOE núm. 172, de 20 de julio de 2006). https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-2006-13087

LOOSEMORE, J., HANBY, V. J. (1971). The Theoretical Limits of Maximum Distortion: Some Analytic Expressions for Electoral Systems. *British Journal of Political Science,* 1(4), 467–477. http://www.jstor.org/stable/193346

OCAÑA LARA, F. A., OÑATE RUBALCABA, P. (2024). Índices e indicadores del sistema electoral y del sistema de partidos una propuesta informática para su cálculo. *Revista Española De Investigaciones Sociológicas*, 86, 223–245. https://doi.org/10.5477/cis/reis.86.223

RAE, D. W. (1971). *The political consequences of electoral laws*. New Haven, Yale University Press.

SAMUELS, D., SNYDER, R. (2001). The Value of a Vote: Malapportionment in Comparative Perspective. *British Journal of Political Science*, 31(4), 651–671. https://doi.org/10.1017/S0007123401000254

SIMÓN, P. (2009). La desigualdad y el valor de un voto: el *malapportionment* de las cámaras bajas en perspectiva comparada. *Revista de Estudios Políticos (nueva época)*, 143, 165–188. https://recyt.fecyt.es/index.php/RevEsPol/article/view/45074

URDÁNOZ GANUZA, J. (2024). Medición de la desproporcionalidad electoral una crítica a los Mínimos Cuadrados. *Revista Española De Investigaciones Sociológicas*, 115, 257–295. https://doi.org/10.5477/cis/reis.115.257